UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 febbraio 2020

Problema 1

Si consideri un calcolatore in cui $M = F(2,4)$. Determinare il valore della variabile `x` dopo l'assegnamento:

$$\mathtt{x} = 3 \oslash 7$$

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matrice invertibile tale che: $\| A \|_1 = \| A^{-1} \|_1 = 10$,

$$B = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Siano poi x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la soluzione del sistema $(A+B)x = b$.

Determinare una limitazione superiore per la misura assoluta dello scostamento della soluzione $\delta x = \hat{x} - x^*$, ovvero per $\| \delta x \|_1$.

Problema 3

Determinare la forma di Newton del polinomio $p \in P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati:

$$(0,0) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad (2,1)$$

Soluzione

Problema 1

L'esponente di $3/7$ in base due è -1, e la frazione $6/7$. Con un procedimento usuale si determina poi:

$$3/7 = 2^{-1} \cdot 0.110110\cdots$$

Gli elementi di M adiacenti a $3/7$ sono: $\xi_- = 2^{-1} \cdot 0.1101$ e $\xi_+ = 2^{-1} \cdot 0.1110$. Il punto medio dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+ è: $m = 2^{-1} \cdot 0.11011 < 3/7$, e quindi si ha:

$$\mathtt{x} = \mathrm{rd}(3/7) = 2^{-1} \cdot 0.1110 = \frac{7}{16}$$

Problema 2

Una limitazione superiore per $\|\delta x\|_1$ si ottiene dal Teorema di condizionamento. Si osservi che:

$$\epsilon_A = \frac{\|B\|_1}{\|A\|_1} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Allora:

$$c_1(A)\epsilon_A = 3 \cdot 10^{-2} < 1$$

dunque $A + B$ è invertibile.

Dal Teorema di condizionamento per $\delta b = 0$ si ottiene poi:

$$\hat{\epsilon}_x = \frac{\|\delta x\|_1}{\|\hat{x}\|_1} \leqslant c_1(A)\epsilon_A = 3 \cdot 10^{-2}$$

Se ne deduce:

$$\|\delta x\|_1 \leqslant 3 \cdot 10^{-2} \, \|\hat{x}\|_1 = 6 \cdot 10^{-2}$$

Problema 3

La base di Newton relativa ai dati assegnati è:

$$1 \quad , \quad x \quad , \quad x(x-1)$$

I coefficienti c_0, c_1, c_2 della forma di Newton del polinomio richiesto si ottengono, allora, risolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene: $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, da cui:

$$p(x) = \tfrac{1}{2}\, x(x-1)$$