UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 14 gennaio 2020

Problema 1

Dimostrare che:

$$\sqrt{2} > \tfrac{14}{10}$$

Siano $M = F(2, 53)$ e rd la funzione arrotondamento in M. Decidere se:

$$\mathrm{rd}(\sqrt{2}) \geqslant \mathrm{rd}(\tfrac{14}{10})$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare A^{-1}.

Problema 3

Indicare, giustificando la risposta, un metodo iterativo ad un punto che sia utilizzabile per approssimare il numero reale $\alpha = \sqrt{7}$.

Soluzione

Problema 1

Si supponga falso l'asserto, ovvero:

$$\sqrt{2} \leqslant \tfrac{14}{10}$$

Se ne deduce che:

$$10\sqrt{2} \leqslant 14$$

e quindi:

$$100 \cdot 2 = 200 \leqslant 14^2 = 196$$

assurdo. Dunque l'aaserto è vero.

La funzione arrotondamento $\mathrm{rd} : \mathbb{R} \to F(2, 53)$ è *non decrescente*, ovvero:

$$x > y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rd}(x) \geqslant \mathrm{rd}(y)$$

Allora:

$$\sqrt{2} > \tfrac{14}{10} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rd}(\sqrt{2}) \geqslant \mathrm{rd}(\tfrac{14}{10})$$

Problema 2

Le colonne di A sono linearmente indipendenti, dunque una fattorizzazione QR si determina utilizzando la procedura GS che fornisce:

$$U = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \sqrt{2}\, I$$

Poiché $A = UT$, si ha $A^{-1} = (UT)^{-1} = T^{-1}U^\mathsf{T}$. Dunque:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, I \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Un metodo certamente utilizzabile è il *metodo di Newton* applicato alla funzione:

$$f(x) = x^2 - 7$$

tale che $f(\sqrt{7}) = 0$.

Il metodo *è utilizzabile* e risulta avere ordine di convergenza *due* perché, ad esempio nell'intervallo $[1, 3] \ni \sqrt{7}$, la derivata prima $f'(x) = 2x$ è continua e non nulla, e la derivata seconda $f''(x) = 2$ è continua. Un punto iniziale che garantisce la convergenza della successione generata si può ottenere con l'apposito criterio di scelta per il metodo di Newton: $x_0 = 3$.