UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 10 gennaio 2019

Problema 1

Sia:

$$A = \{\, \xi \in F(2,5) \text{ tali che } \xi \in (0, \tfrac{8}{13})\,\}$$

Determinare $\inf A$ e $\sup A$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

Indicare due *diverse* fattorizzazioni QR di A.

Problema 3

Determinare l'elemento di $\mathrm{span}\{x^2\}$ che meglio approssima i dati:

$$(-1,1) \quad , \quad (0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (2,3)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Poiché zero è punto di accumulazione di $F(2,5)$ — come di $F(\beta,m)$ per ogni base β e precisione m — si ha: $\inf A = 0$.

Invece, constatato che $\frac{8}{13} \notin F(2,5)$ e detti ξ_- e ξ_+ gli elementi di $F(2,5)$ *adiacenti* a $\frac{8}{13}$ si ha: $\sup A = \max A = \xi_- = 2^0\, 0.10011 = \frac{19}{32}$.

Problema 2

Le colonne di A sono linearmente indipendenti, dunque una fattorizzazione QR si determina utilizzando la procedura GS che fornisce:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una diversa fattorizzazione (U', T') si ottiene scegliendo numeri reali σ_1, σ_2 e σ_3 non tutti nulli e tali che:

$$\sigma_j \in \{0, 1\} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

e ponendo:

$$S = \begin{bmatrix} (-1)^{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\sigma_3} \end{bmatrix} \quad , \quad U' = US \quad , \quad T' = ST$$

Problema 3

L'elemento cercato è: $a_1 x^2$, dove a_1 è la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

che traduce le condizioni di interpolazione.

Le equazioni normali del sistema scritto sono: $18z = 14$, da cui $a_1 = \frac{7}{9}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 31 gennaio 2019

Problema 1

Siano $x = \frac{1}{7}$ e $y = \frac{1}{8}$. Determinare il minimo valore di m tale che $\mathrm{rd}(x) \neq \mathrm{rd}(y)$ in $F(2, m)$.

Problema 2

Sia a^* un numero reale positivo. Per ogni $a \in [0, a^*]$, sia:

$$M(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare il valore di a che rende *massimo* il numero di condizionamento di $M(a)$ in norma infinito.

Problema 3

Posto $F = \mathrm{span}\{\,1, t, \mathrm{sen}\, 2\pi t\,\}$ e assegnati numeri reali y_0, y_1, y_2, si consideri il problema lineare di interpolazione di determinare gli elementi $f \in F$ che verificano le condizioni:

$$f(0) = y_0 \quad , \quad \int_0^1 f(x)\, dx = y_1 \quad , \quad f(\tfrac{1}{4}) = y_2$$

Indicare il *numero di soluzioni* del problema.

Soluzione

Problema 1

In base due si ha:

$$\tfrac{1}{7} = 2^{-2}\, 0.\overline{100} \quad , \quad \tfrac{1}{8} = 2^{-2}\, 0.1$$

Per ogni valore consentito di m si ha: $\mathrm{rd}(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$ in $F(2,m)$. Inoltre: per $m = 1$ e $m = 2$ si constata che $\mathrm{rd}(\frac{1}{7}) = \frac{1}{8}$, mentre per $m = 3$ si ha:

$$\mathrm{rd}(\tfrac{1}{7}) = 2^{-2}\, 0.101 \neq \tfrac{1}{8}$$

Dunque il valore cercato di m è *tre*.

Problema 2

Essendo a non negativo si ha:

$$\| \, M(a) \, \|_\infty = 1 + a$$

Inoltre, risolvendo il sistema $M(a)x = y$ con la procedura di sostituzione in avanti, si ottiene:

$$M(a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\| \, M(a)^{-1} \, \|_\infty = 1 + a + a^2$$

Allora il numero di condizionamento di $M(a)$ in norma infinito è:

$$(1 + a)(1 + a + a^2) = 1 + 2a + 2a^2 + a^3$$

che nell'intervallo $[0, a^*]$ risulta una funzione *monotona crescente* di a. Dunque il massimo valore del numero di condizionamento si ottiene per $a = a^*$.

Problema 3

Per determinare gli elementi di F che verificano le condizioni richieste si cercano le soluzioni del *sistema di interpolazione*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

La matrice del sistema è *invertibile*, dunque per ogni y_0, y_1 e y_2 esiste *un solo* elemento di F che verifica le condizioni richieste.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 febbraio 2019

Problema 1

Siano $M = F(\beta, m)$ e a, b due elementi non nulli di M. Posto:

$$r = \frac{1}{ab} \quad \text{e} \quad \rho = 1 \oslash (a \otimes b)$$

determinare una stima, in termini della precisione di macchina u di M, dell'errore relativo massimo commesso approssimando r con ρ.

Problema 2

Per ogni $x > -2$ sia $h(x) = \ln(x + 2)$. Determinare il numero di punti uniti di h, separarli e, per ciascuno di essi, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione. In caso affermativo, indicare anche l'ordine di convergenza del metodo al punto unito.

Problema 3

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Indicare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per determinare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

Soluzione

Problema 1

Si ricordi che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un numero reale e tale che:

$$\mathrm{rd}(x) = x(1+e) \qquad \text{e} \qquad |e| \leqslant u$$

Utilizzando la definizione di pseudo-operazioni aritmetiche, esistono numeri reali e_1 ed e_2 tali che:

$$\rho = \frac{1+e_2}{ab(1+e_1)} = r\,\frac{1+e_2}{1+e_1} \qquad \text{e} \qquad |e_1| \leqslant u \quad , \quad |e_2| \leqslant u$$

Detto t l'errore relativo commesso approssimando r con ρ si ha allora:

$$t = \frac{1+e_2}{1+e_1} - 1 = \frac{e_2 - e_1}{1+e_1}$$

da cui, tenuto conto delle limitazioni su e_1 ed e_2:

$$|t| \leqslant \frac{|e_2| + |e_1|}{|1+e_1|} \leqslant \frac{2u}{1-u} \approx 2u$$

Problema 2

Per ogni $x > -2$ sia $f(x) = h(x) - x$. Si verifica facilmente che gli zeri di f sono tutti e soli i punti uniti di h. Inoltre f ha derivate di qualsiasi ordine e risulta:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0 \quad \text{per ogni } x > -2$$

Si deduce che f ha *al più* due zeri. Ma:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \quad , \quad f(-1) > 0 \quad \text{e} \quad f(0) > 0 \quad , \quad f(e^2) < 0$$

dunque f ha due zeri:

$$\alpha_1 \in [-2, -1] \quad \text{e} \quad \alpha_2 \in [0, e^2]$$

Infine:

$$h'(x) = \frac{1}{x+2}$$

Allora, essendo $\alpha_1 < -1$ e $\alpha_2 > -1$:

$$h'(\alpha_1) > 1 \quad \text{e} \quad 0 < h'(\alpha_2) < 1$$

Se ne deduce che il metodo definito da h: (1) *non è* utilizzabile per approssimare α_1 e (2) *è* utilizzabile per approssimare α_2 con ordine di convergenza *uno* (e le successioni convergenti ad α_2 sono *definitivamente monotone*).

Problema 3

Utilizzando la procedura GS si ottiene la fattorizzazione QR di A costituita da:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni nel senso dei minimi quadrati di $Ax = b$ sono le soluzioni del sistema $Tx = U^\mathsf{T} b$. Quest'ultimo sistema ha una sola soluzione:

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 6 giugno 2019

Problema 1

Siano $x = 7.1$ e $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di x in M e l'errore relativo ϵ commesso approssimando x con il suo arrotondato.

Problema 2

Determinare l'elemento f^* di $\text{span}\{x, x^2\}$ che meglio approssima i dati $(-1,1), (0,1), (1,1)$ nel senso dei minimi quadrati. Determinare poi lo scarto quadratico relativo ad f^*.

Problema 3

Sia h l'elemento di $\text{span}\{1, x, x^2\}$ che ha 0 ed 1 come punti uniti e tale che $h'(1) = 0$.

Determinare un numero reale $x_0 \neq 1$ a partire dal quale la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente ad 1.

Soluzione

Problema 1

L'espressione di x in base due si può determinare osservando che:

- $x = 7 + \frac{1}{10}$
- In base due si ha $7 = 111$ e $\frac{1}{10} = 2^{-3} \cdot 0.\overline{1100}$

dunque:

$$x = 111.000\overline{1100} = 2^3 \cdot 0.1110001\overline{100}$$

Allora $x \notin M$ e gli elementi di M adiacenti ad x sono: $\xi_- = 2^3 \cdot 0.1110$ e $\xi_+ = 2^3 \cdot 0.1111$. Il punto medio del segmento di estremi ξ_- e ξ_+ è: $2^3 \cdot 0.11101 > x$. Dunque l'arrotondato di x in M è: $\xi_- = 2^3 \cdot 0.1110 = 7$.

Per l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$, indicata con u la precisione di macchina in M, si ha:

$$\epsilon = \frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x} = -\frac{1}{71} \qquad \text{e} \qquad |\epsilon| < u$$

Problema 2

Per determinare f^* si calcola la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema che traduce le condizioni di interpolazione dei dati:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema delle equazioni normali si ottiene:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$f^*(x) = x^2$$

Per lo scarto quadratico si ha:

$$\mathrm{SQ}(f^*) = (1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 = 1$$

Problema 3

La funzione h è l'unico elemento di $\mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ che verifica le condizioni richieste: $h(0) = 0, h(1) = 1$ e $h'(1) = 0$, ovvero:

$$h(x) = 2x - x^2$$

Poiché $h'(x) = 2-2x$, per ogni $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = I$ si ha $|h'(x)| < 1$. Scelto $x_0 \in I$, l'intervallo chiuso di centro 1 e raggio $|x_0 - 1|$ verifica, insieme ad h, le condizioni (1) e (2) del Teorema di convergenza. Dunque, per il criterio di scelta del punto iniziale, la successione generata dal metodo definito da h a partire da x_0 converge al punto unito 1.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 27 giugno 2019

Problema 1

Siano $M = F(2, 53)$ e, per ogni elemento non negativo $\xi \in M$, $\texttt{SQRT}(\xi) = \mathrm{rd}(\sqrt{\xi})$. Per ogni $x > 0$ siano:

$$f(x) = 7\sqrt{x} \quad \text{e} \quad \phi(x) = 7 \otimes \texttt{SQRT}(\mathrm{rd}(x))$$

Per ogni numero reale $x > 0$, discutere il condizionamento del calcolo di $f(x)$ e la stabilità dell'algoritmo ϕ quando utilizzato per approssimare il valore di f in x.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare il numero di condizionamento di A in norma infinito.

Problema 3

Determinare gli elementi di $P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$\int_0^2 p(t)\, dt = 2 \quad , \quad \int_1^3 p(t)\, dt = 2$$

Soluzione

Problema 1

Siano $x > 0$ e $e \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$f(\,(1+e)x\,) = 7\sqrt{(1+e)x} = \sqrt{1+e}\; f(x)$$

Posto:

$$1 + e_p^f = \sqrt{1+e}$$

si ha dunque:

$$f(\,(1+e)x\,) = (1+e_p^f)\, f(x)$$

Poiché per e piccolo si ha:

$$e_p^f = \sqrt{1+e} - 1 \approx \tfrac{1}{2}\, e$$

il calcolo di f in x è ben condizionato.

Si osservi adesso che $7 \in M$, dunque l'algoritmo ϕ è ben definito. Inoltre, introducendo le perturbazioni moltiplicative dovute agli arrotondamenti, si riscrive:

$$\phi(x) = \mathrm{rd}\Big(7\,\mathrm{rd}(\,\sqrt{\mathrm{rd}(x)}\,)\Big) = (1+e_3)\,7\,(1+e_2)\sqrt{(1+e_1)x}$$

Posto:

$$1 + e_v = (1+e_3)(1+e_2) \quad \text{e} \quad 1 + e_a = 1 + e_1$$

si ottiene:

$$\phi(x) = (1+e_v) f((1+e_a)x)$$

e, detta u la precisione di macchina in M:

$$|e_v| \leqslant |e_2| + |e_3| + |e_2 e_3| \leqslant 2u + u^2 \qquad , \qquad |e_a| \leqslant u$$

dunque l'algoritmo ϕ è stabile quando utilizzato per approssimare f in x.

Problema 2

Si osservi che A è determinata da una fattorizzazione LR, ed è invertibile perché lo sono (palesemente) i due fattori S e D. Allora il numero di condzionamento richiesto esiste.

Si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\|A\|_\infty = |-1| + |3| = 4$$

Le colonne $y_1, \ldots, y_4$ della matrice A^{-1} si ottengono utilizzando le procedure `SI` ed `SA` come segue. Indicate con $e_k, k = 1,2,3$, le colonne della matrice identità in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, si calcolano:

$$c_k = \mathtt{SA}(S, e_k) \quad , \quad k = 1,2,3$$

e poi

$$y_k = \mathtt{SI}(D, c_k) \quad , \quad k = 1,2,3$$

Si ottiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\|A^{-1}\|_\infty = |-3| + |2| = 5 \qquad c_\infty(A) = 20$$

Problema 3

Il problema proposto è lineare di interpolazione.

Si cercano numeri reali a_0 e a_1 tali che, posto $p(x) = a_0 + a_1 x$, si abbia:

$$\int_0^2 p(t)\,dt = 2a_0 + 2a_1 = 2 \quad , \quad \int_1^3 p(t)\,dt = 2a_0 + 4a_1 = 2$$

I valori cercati sono quindi le componenti delle soluzioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha una sola soluzione:

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque un solo elemento di $P_1(\mathbb{R})$ verifica le condizioni richieste: $p(x) = 1$.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 luglio 2019

Problema 1

Siano $M = F(2,3)$ e $x = \mathrm{rd}(0.71) \otimes 5$. Determinare il valore di x.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per risolvere il sistema $A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} b$.

Problema 3

Si consideri la funzione $f(x) = x(x-1)(x+2) - 1$. Determinare il numero di zeri di f e separarli.

Soluzione

Problema 1

L'esponente di 0.71 in base due è *zero*, e la frazione 0.71. Con un procedimento usuale si determina poi:

$$0.71 = 2^0 \cdot 0.1011 \cdots$$

Gli elementi di M adiacenti a 0.71 sono: $\xi_- = 2^0 \cdot 0.101$ e $\xi_+ = 2^0 \cdot 0.110$. Il punto medio dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+ è: $m = 2^0 \cdot 0.1011 < 0.71$, e quindi si ha: $\mathrm{rd}(0.71) = 2^0 \cdot 0.110 = \frac{3}{4}$.

Infine, si ha: $x = \mathrm{rd}(\frac{15}{4}) = \mathrm{rd}(11.11) = \mathrm{rd}(2^2 \cdot 0.1111)$. Procedendo come sopra si ottiene:

$$x = 2^3 \cdot 0.100 = 4$$

Problema 2

Utilizzando la procedura GS si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema $A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} b$ è poi *equivalente* al sistema $Tx = U^\mathsf{T} b$, ovvero:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la cui soluzione x^* si determina con la procedura SI:

$$x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Poiché f è un polinomio di grado tre, ha *al più tre zeri.* Alla stessa conclusione si arriva constatando che: $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$, mentre $f'(x)$ e $f''(x)$ si annullano per qualche valore di x.

Osservato che il grafico di f si ottiene traslando in basso di uno quello del polinomio $x(x-1)(x+2)$, si deduce facilmente che:

$$f(-2) < 0 \quad , \quad f(0) < 0 \quad , \quad f(1) < 0$$

Si verifica poi che: $f(-1) > 0$ e $f(2) > 0$, e quindi f ha *tre zeri.* Detti α_1, α_2 e α_3 gli zeri, si ha infine:

$$\alpha_1 \in (-2,-1) \quad , \quad \alpha_2 \in (-1,0) \quad , \quad \alpha_3 \in (1,2)$$