UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 luglio 2019

Problema 1

Siano $M = F(2,3)$ e $x = \mathrm{rd}(0.71) \otimes 5$. Determinare il valore di x.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per risolvere il sistema $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$.

Problema 3

Si consideri la funzione $f(x) = x(x-1)(x+2) - 1$. Determinare il numero di zeri di f e separarli.

Soluzione

Problema 1

L'esponente di 0.71 in base due è *zero*, e la frazione 0.71. Con un procedimento usuale si determina poi:

$$0.71 = 2^0 \cdot 0.1011 \cdots$$

Gli elementi di M adiacenti a 0.71 sono: $\xi_- = 2^0 \cdot 0.101$ e $\xi_+ = 2^0 \cdot 0.110$. Il punto medio dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+ è: $m = 2^0 \cdot 0.1011 < 0.71$, e quindi si ha: $\mathrm{rd}(0.71) = 2^0 \cdot 0.110 = \frac{3}{4}$.

Infine, si ha: $x = \mathrm{rd}(\frac{15}{4}) = \mathrm{rd}(11.11) = \mathrm{rd}(2^2 \cdot 0.1111)$. Procedendo come sopra si ottiene:

$$x = 2^3 \cdot 0.100 = 4$$

Problema 2

Utilizzando la procedura GS si ottiene:

$$U = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema $A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} b$ è poi *equivalente* al sistema $Tx = U^\mathsf{T} b$, ovvero:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la cui soluzione x^* si determina con la procedura SI:

$$x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Poiché f è un polinomio di grado tre, ha *al più tre zeri.* Alla stessa conclusione si arriva constatando che: $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$, mentre $f'(x)$ e $f''(x)$ si annullano per qualche valore di x.

Osservato che il grafico di f si ottiene traslando in basso di uno quello del polinomio $x(x-1)(x+2)$, si deduce facilmente che:

$$f(-2) < 0 \quad , \quad f(0) < 0 \quad , \quad f(1) < 0$$

Si verifica poi che: $f(-1) > 0$ e $f(2) > 0$, e quindi f ha *tre zeri.* Detti α_1, α_2 e α_3 gli zeri, si ha infine:

$$\alpha_1 \in (-2, -1) \quad , \quad \alpha_2 \in (-1, 0) \quad , \quad \alpha_3 \in (1, 2)$$