UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

IN SUPREMÆ DIGNITATIS • 1343 •

# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 27 giugno 2019

## Problema 1

Siano $M = F(2, 53)$ e, per ogni elemento non negativo $\xi \in M$, $\texttt{SQRT}(\xi) = \mathrm{rd}(\sqrt{\xi})$. Per ogni $x > 0$ siano:

$$f(x) = 7\sqrt{x} \quad \text{e} \quad \phi(x) = 7 \otimes \texttt{SQRT}(\mathrm{rd}(x))$$

Per ogni numero reale $x > 0$, discutere il condizionamento del calcolo di $f(x)$ e la stabilità dell'algoritmo $\phi$ quando utilizzato per approssimare il valore di $f$ in $x$.

## Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare il numero di condizionamento di $A$ in norma infinito.

## Problema 3

Determinare gli elementi di $P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$\int_0^2 p(t)\,dt = 2 \quad , \quad \int_1^3 p(t)\,dt = 2$$

## Soluzione

### Problema 1

Siano $x > 0$ e $e \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$f(\,(1+e)x\,) = 7\sqrt{(1+e)x} = \sqrt{1+e}\; f(x)$$

Posto:

$$1 + e_p^f = \sqrt{1+e}$$

si ha dunque:

$$f(\,(1+e)x\,) = (1 + e_p^f)\, f(x)$$

Poiché per $e$ piccolo si ha:

$$e_p^f = \sqrt{1+e} - 1 \approx \tfrac{1}{2}\, e$$

il calcolo di $f$ in $x$ è ben condizionato.

Si osservi adesso che $7 \in M$, dunque l'algoritmo $\phi$ è ben definito. Inoltre, introducendo le perturbazioni moltiplicative dovute agli arrotondamenti, si riscrive:

$$\phi(x) = \mathrm{rd}\Big(7\,\mathrm{rd}(\,\sqrt{\mathrm{rd}(x)}\,)\Big) = (1+e_3)\,7\,(1+e_2)\sqrt{(1+e_1)x}$$

Posto:

$$1 + e_v = (1+e_3)(1+e_2) \quad \text{e} \quad 1 + e_a = 1 + e_1$$

si ottiene:

$$\phi(x) = (1+e_v) f((1+e_a)x)$$

e, detta $u$ la precisione di macchina in $M$:

$$|e_v| \leqslant |e_2| + |e_3| + |e_2 e_3| \leqslant 2u + u^2 \qquad , \qquad |e_a| \leqslant u$$

dunque l'algoritmo $\phi$ è stabile quando utilizzato per approssimare $f$ in $x$.

### Problema 2

Si osservi che $A$ è determinata da una fattorizzazione LR, ed è invertibile perché lo sono (palesemente) i due fattori $S$ e $D$. Allora il numero di condzionamento richiesto esiste.

Si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\|A\|_\infty = |-1| + |3| = 4$$

Le colonne $y_1, \ldots, y_4$ della matrice $A^{-1}$ si ottengono utilizzando le procedure `SI` ed `SA` come segue. Indicate con $e_k, k = 1,2,3$, le colonne della matrice identità in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, si calcolano:

$$c_k = \mathtt{SA}(S, e_k) \quad , \quad k = 1,2,3$$

e poi

$$y_k = \mathtt{SI}(D, c_k) \quad , \quad k = 1,2,3$$

Si ottiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\|A^{-1}\|_\infty = |-3| + |2| = 5 \qquad c_\infty(A) = 20$$

## Problema 3

Il problema proposto è lineare di interpolazione.

Si cercano numeri reali $a_0$ e $a_1$ tali che, posto $p(x) = a_0 + a_1 x$, si abbia:

$$\int_0^2 p(t)\,dt = 2a_0 + 2a_1 = 2 \quad , \quad \int_1^3 p(t)\,dt = 2a_0 + 4a_1 = 2$$

I valori cercati sono quindi le componenti delle soluzioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha una sola soluzione:

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque un solo elemento di $P_1(\mathbb{R})$ verifica le condizioni richieste: $p(x) = 1$.