UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 6 giugno 2019

Problema 1

Siano $x = 7.1$ e $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di x in M e l'errore relativo ϵ commesso approssimando x con il suo arrotondato.

Problema 2

Determinare l'elemento f^* di $\text{span}\{x, x^2\}$ che meglio approssima i dati $(-1,1), (0,1), (1,1)$ nel senso dei minimi quadrati. Determinare poi lo scarto quadratico relativo ad f^*.

Problema 3

Sia h l'elemento di $\text{span}\{1, x, x^2\}$ che ha 0 ed 1 come punti uniti e tale che $h'(1) = 0$.

Determinare un numero reale $x_0 \neq 1$ a partire dal quale la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente ad 1.

Soluzione

Problema 1

L'espressione di x in base due si può determinare osservando che:

- $x = 7 + \frac{1}{10}$
- In base due si ha $7 = 111$ e $\frac{1}{10} = 2^{-3} \cdot 0.\overline{1100}$

dunque:

$$x = 111.000\overline{1100} = 2^3 \cdot 0.1110001\overline{100}$$

Allora $x \notin M$ e gli elementi di M adiacenti ad x sono: $\xi_- = 2^3 \cdot 0.1110$ e $\xi_+ = 2^3 \cdot 0.1111$. Il punto medio del segmento di estremi ξ_- e ξ_+ è: $2^3 \cdot 0.11101 > x$. Dunque l'arrotondato di x in M è: $\xi_- = 2^3 \cdot 0.1110 = 7$.

Per l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$, indicata con u la precisione di macchina in M, si ha:

$$\epsilon = \frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x} = -\tfrac{1}{71} \qquad \text{e} \qquad |\epsilon| < u$$

Problema 2

Per determinare f^* si calcola la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema che traduce le condizioni di interpolazione dei dati:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema delle equazioni normali si ottiene:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$f^*(x) = x^2$$

Per lo scarto quadratico si ha:

$$\mathrm{SQ}(f^*) = (1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 = 1$$

Problema 3

La funzione h è l'unico elemento di $\mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ che verifica le condizioni richieste: $h(0) = 0, h(1) = 1$ e $h'(1) = 0$, ovvero:

$$h(x) = 2x - x^2$$

Poiché $h'(x) = 2-2x$, per ogni $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = I$ si ha $|h'(x)| < 1$. Scelto $x_0 \in I$, l'intervallo chiuso di centro 1 e raggio $|x_0 - 1|$ verifica, insieme ad h, le condizioni (1) e (2) del Teorema di convergenza. Dunque, per il criterio di scelta del punto iniziale, la successione generata dal metodo definito da h a partire da x_0 converge al punto unito 1.