UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 febbraio 2019

Problema 1

Siano $M = F(\beta, m)$ e a, b due elementi non nulli di M. Posto:

$$r = \frac{1}{ab} \quad \text{e} \quad \rho = 1 \oslash (a \otimes b)$$

determinare una stima, in termini della precisione di macchina u di M, dell'errore relativo massimo commesso approssimando r con ρ.

Problema 2

Per ogni $x > -2$ sia $h(x) = \ln(x+2)$. Determinare il numero di punti uniti di h, separarli e, per ciascuno di essi, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione. In caso affermativo, indicare anche l'ordine di convergenza del metodo al punto unito.

Problema 3

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Indicare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per determinare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

Soluzione

Problema 1

Si ricordi che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un numero reale e tale che:

$$\mathrm{rd}(x) = x(1+e) \qquad \text{e} \qquad |e| \leqslant u$$

Utilizzando la definizione di pseudo-operazioni aritmetiche, esistono numeri reali e_1 ed e_2 tali che:

$$\rho = \frac{1+e_2}{ab(1+e_1)} = r\,\frac{1+e_2}{1+e_1} \qquad \text{e} \qquad |e_1| \leqslant u \quad , \quad |e_2| \leqslant u$$

Detto t l'errore relativo commesso approssimando r con ρ si ha allora:

$$t = \frac{1+e_2}{1+e_1} - 1 = \frac{e_2 - e_1}{1+e_1}$$

da cui, tenuto conto delle limitazioni su e_1 ed e_2:

$$|t| \leqslant \frac{|e_2| + |e_1|}{|1+e_1|} \leqslant \frac{2u}{1-u} \approx 2u$$

Problema 2

Per ogni $x > -2$ sia $f(x) = h(x) - x$. Si verifica facilmente che gli zeri di f sono tutti e soli i punti uniti di h. Inoltre f ha derivate di qualsiasi ordine e risulta:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0 \quad \text{per ogni } x > -2$$

Si deduce che f ha *al più* due zeri. Ma:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \quad , \quad f(-1) > 0 \quad \text{e} \quad f(0) > 0 \quad , \quad f(e^2) < 0$$

dunque f ha due zeri:

$$\alpha_1 \in [-2, -1] \quad \text{e} \quad \alpha_2 \in [0, e^2]$$

Infine:

$$h'(x) = \frac{1}{x+2}$$

Allora, essendo $\alpha_1 < -1$ e $\alpha_2 > -1$:

$$h'(\alpha_1) > 1 \quad \text{e} \quad 0 < h'(\alpha_2) < 1$$

Se ne deduce che il metodo definito da h: (1) *non è* utilizzabile per approssimare α_1 e (2) *è* utilizzabile per approssimare α_2 con ordine di convergenza *uno* (e le successioni convergenti ad α_2 sono *definitivamente monotone*).

Problema 3

Utilizzando la procedura GS si ottiene la fattorizzazione QR di A costituita da:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni nel senso dei minimi quadrati di $Ax = b$ sono le soluzioni del sistema $Tx = U^{\mathsf{T}}b$. Quest'ultimo sistema ha una sola soluzione:

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$