UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 31 gennaio 2019

Problema 1

Siano $x = \frac{1}{7}$ e $y = \frac{1}{8}$. Determinare il minimo valore di m tale che $\mathrm{rd}(x) \neq \mathrm{rd}(y)$ in $F(2, m)$.

Problema 2

Sia a^* un numero reale positivo. Per ogni $a \in [0, a^*]$, sia:

$$M(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare il valore di a che rende *massimo* il numero di condizionamento di $M(a)$ in norma infinito.

Problema 3

Posto $F = \mathrm{span}\{\, 1, t, \operatorname{sen} 2\pi t \,\}$ e assegnati numeri reali y_0, y_1, y_2, si consideri il problema lineare di interpolazione di determinare gli elementi $f \in F$ che verificano le condizioni:

$$f(0) = y_0 \quad , \quad \int_0^1 f(x)\, dx = y_1 \quad , \quad f(\tfrac{1}{4}) = y_2$$

Indicare il *numero di soluzioni* del problema.

Soluzione

Problema 1

In base due si ha:

$$\tfrac{1}{7} = 2^{-2}\,0.\overline{100} \quad , \quad \tfrac{1}{8} = 2^{-2}\,0.1$$

Per ogni valore consentito di m si ha: $\mathrm{rd}(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$ in $F(2, m)$. Inoltre: per $m = 1$ e $m = 2$ si constata che $\mathrm{rd}(\frac{1}{7}) = \frac{1}{8}$, mentre per $m = 3$ si ha:

$$\mathrm{rd}(\tfrac{1}{7}) = 2^{-2}\,0.101 \neq \tfrac{1}{8}$$

Dunque il valore cercato di m è *tre*.

Problema 2

Essendo a non negativo si ha:

$$\| M(a) \|_\infty = 1 + a$$

Inoltre, risolvendo il sistema $M(a)x = y$ con la procedura di sostituzione in avanti, si ottiene:

$$M(a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\| M(a)^{-1} \|_\infty = 1 + a + a^2$$

Allora il numero di condizionamento di $M(a)$ in norma infinito è:

$$(1 + a)(1 + a + a^2) = 1 + 2a + 2a^2 + a^3$$

che nell'intervallo $[0, a^*]$ risulta una funzione *monotona crescente* di a. Dunque il massimo valore del numero di condizionamento si ottiene per $a = a^*$.

Problema 3

Per determinare gli elementi di F che verificano le condizioni richieste si cercano le soluzioni del *sistema di interpolazione*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

La matrice del sistema è *invertibile*, dunque per ogni y_0, y_1 e y_2 esiste *un solo* elemento di F che verifica le condizioni richieste.