UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 10 gennaio 2019

Problema 1

Sia:

$$A = \{\, \xi \in F(2,5) \text{ tali che } \xi \in (0, \tfrac{8}{13})\,\}$$

Determinare $\inf A$ e $\sup A$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

Indicare due *diverse* fattorizzazioni QR di A.

Problema 3

Determinare l'elemento di $\operatorname{span}\{x^2\}$ che meglio approssima i dati:

$$(-1,1) \quad , \quad (0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (2,3)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Poiché zero è punto di accumulazione di $F(2,5)$ — come di $F(\beta, m)$ per ogni base β e precisione m — si ha: $\inf A = 0$.

Invece, constatato che $\frac{8}{13} \notin F(2,5)$ e detti ξ_- e ξ_+ gli elementi di $F(2,5)$ *adiacenti* a $\frac{8}{13}$ si ha: $\sup A = \max A = \xi_- = 2^0\, 0.10011 = \frac{19}{32}$.

Problema 2

Le colonne di A sono linearmente indipendenti, dunque una fattorizzazione QR si determina utilizzando la procedura GS che fornisce:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una diversa fattorizzazione (U', T') si ottiene scegliendo numeri reali σ_1, σ_2 e σ_3 non tutti nulli e tali che:

$$\sigma_j \in \{0, 1\} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

e ponendo:

$$S = \begin{bmatrix} (-1)^{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\sigma_3} \end{bmatrix} \quad , \quad U' = US \quad , \quad T' = ST$$

Problema 3

L'elemento cercato è: $a_1 x^2$, dove a_1 è la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

che traduce le condizioni di interpolazione.

Le equazioni normali del sistema scritto sono: $18z = 14$, da cui $a_1 = \frac{7}{9}$.