UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'11 gennaio 2018

Problema 1

Determinare quanti elementi di $F(2,9) \cap [\frac{1}{3}, 2]$ hanno esponente *uno* in base due.

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice invertibile e $B = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Indicare un procedimento che, utilizzando SA, SI ed EGP, determina *la matrice* $X = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tale che:

$$AX = B$$

e calcolare il *costo aritmetico* del procedimento in funzione di n ed r.

Problema 3

La massa m di un corpo omogeneo di densità ρ è proporzionale al volume V:

$$m = \rho V$$

Da alcune misure su vari oggetti costituiti di uno stesso materiale omogeneo si ottengono i *dati*:

V	1	2	4
m	3.5	6.25	11

Determinare il valore ρ^* della densità che individua, tra tutte le funzioni della forma ρV, quella che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Indichiamo con B_1 l'insieme degli elementi di $F(2,9)$ con esponente *uno*. Poiché sia l'elemento più piccolo di B_1, $2^1\,0.1$, che il più grande, $2^1\,0.1\cdots 1 = \pi(2)$, appartengono all'intervallo $[\frac{1}{3}, 2]$, si ha $B_1 \subset [\frac{1}{3}, 2]$. Dunque gli elementi cercati sono tanti quanti i possibili valori della frazione in $F(2,9)$, ovvero: $2^8 = 256$.

Problema 2

Per $k = 1, \ldots, r$ la colonna x_k è la soluzione del sistema $Ax = b_k$. Allora, tenuto conto che tutti i sistemi da risolvere hanno *la stessa matrice* dei coefficienti, il procedimento è:

$[S, D, P] = \mathrm{EGP}(A)$

`per` $k = 1, \ldots, r$ `ripeti`:
  $c = \mathrm{SA}(S, Pb_k)$;
  $x_k = \mathrm{SI}(D, c)$;

$X = (x_1 \ldots, x_r)$.

Il costo del procedimento è:

$$\text{costo EGP} + r(\text{costo SA} + \text{costo SI})$$

ovvero:

$$\tfrac{2}{3}\,n^3 - \tfrac{1}{2}\,n^2 - \tfrac{1}{6}\,n + 2rn^2$$

Problema 3

Il valore ρ^* cercato è la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema che traduce le condizioni di interpolazione:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rho = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 6.25 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ovvero la soluzione del sistema delle *equazioni normali*:

$$21\rho = 60$$

quindi:

$$\rho^* = \tfrac{60}{21} = \tfrac{20}{7}$$

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'1 febbraio 2018

Problema 1

Siano rd la funzione arrotondamento in $M = F(2, 53)$ e δ la funzione errore assoluto definita, per ogni numero reale x, da:

$$\delta(x) = \mathrm{rd}(x) - x$$

Determinare:

$$\max_{x \in [1,3]} |\, \delta(x) \,|$$

Problema 2

Sia $H \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matrice elementare di Gauss tale che:

$$H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Dopo aver determinato H e completato l'uguaglianza (ovvero determinato *tutti* i valori degli elementi indicati con $\times$), calcolare H^{-1} e $c_\infty(H)$.

Problema 3

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \ln x - e^{-x}$$

Dopo aver determinato il *numero di zeri* di f ed averli *separati*, per ciascuno zero si decida se il *metodo di Newton* sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermetivo, si indichi un valore x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo risulti convergente allo zero.

Soluzione

Problema 1

Sia b l'esponente in base β di x. Allora si ha:

$$|\,\delta(x)\,| \leqslant \tfrac{1}{2}\beta^{b-m}$$

e l'uguaglianza sussiste ogni volta che x è equidistante dai due elementi di M ad esso adiacenti. Nel caso in esame si ha $\beta = 2, m = 53$ e $1 \leqslant b \leqslant 2$, quindi:

$$\max_{x\in[1,3]} |\,\delta(x)\,| = 2^{2-54} = 2^{-52}$$

Problema 2

L'uguaglianza determina un'unica matrice elementare di Gauss:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene allora:

$$H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $c_\infty(H) = \|\, H \,\|_\infty \|\, H^{-1} \,\|_\infty = 2 \cdot 2 = 4$.

Problema 3

La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato. In particolare:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x}$$

Dalla prima uguaglianza si deduce che per ogni x nel dominio di f si ha $f'(x) > 0$, dunque f ha *al più* uno zero. Osservando i grafici delle funzioni $y = \ln x$ e $y = e^{-x}$ si deduce che f ha uno zero α separato dall'intervallo $[1, e]$.

Poiché si ha certamente $f'(\alpha) \neq 0$, il metodo di Newton è certamente utilizzabile e, essendo $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [1, e]$ un valore iniziale che garantisce la convergenza della successione generata dal metodo di Newton è $x_0 = 1$.

Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 febbraio 2018

Problema 1

Siano $M = F(2,3), \xi_1 = \frac{7}{4}$ e $\xi_2 = \frac{3}{8}$. Dopo aver verificato che ξ_1 e ξ_2 sono elementi di M, determinare $\xi_1 \otimes \xi_2$.

Problema 2

Siano x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e $\hat{x}$ la soluzione del sistema perturbato $Ax = b + \delta b$. Posto che:

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad c_1(A) = 10$$

e le colonne $b, \delta b$ sono tali che:

$$\epsilon_b = \frac{\| \delta b \|_1}{\| b \|_1} = \frac{1}{30}$$

determinare una limitazione superiore per la misura relativa dello scostamento $\delta x = x^* - \hat{x}$:

$$\epsilon_x = \frac{\| \delta x \|_1}{\| x^* \|_1}$$

e rappresentare su un piano cartesiano l'insieme dei possibili valori di $\hat{x}$.

Problema 3

Si consideri l'equazione:

$$e^x - 1 = x + 1$$

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione, separarle, e per ciascuna di esse decidere se il metodo iterativo definito da:

$$h(x) = e^x - 2$$

sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

In base due si ha: sette $= 111$ e tre $= 11$. Allora:

$$\tfrac{7}{4} = 2^1\, 0.111 \quad , \quad \tfrac{3}{8} = 2^{-1}\, 0.11$$

ed entrambi risultano elementi di $F(2,3)$.

Si ha poi:

$$\tfrac{7}{4} \otimes \tfrac{3}{8} = \mathrm{rd}(2^1\, 0.111 \cdot 2^{-1}\, 0.11) = \mathrm{rd}(0.10101) = 0.101 = \tfrac{5}{8}$$

Problema 2

Il Teorema di Condizionamento afferma che per ogni b ed ogni δb si ha:

$$\epsilon_x \leqslant c_1(A)\epsilon_b = 10 \cdot \tfrac{1}{30} = \tfrac{1}{3}$$

Essendo poi $\| x^* \|_1 = 3$ la limitazione ottenuta è equivalente a:

$$\| \delta x \|_1 \leqslant \tfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Ricordato che $\delta x = \hat{x} - x^*$, l'insieme dei possibili valori di $\hat{x}$, facilmente rappresentabile, è:

$$\hat{x} = x^* + \delta x \quad \text{con} \quad \delta x \in I_1(0,1)$$

ovvero $I_1(x^*, 1)$.

Problema 3

Rappresentati i grafici delle funzioni $y = e^x - 1$ e $y = x + 1$ si constata facilmente che l'equazione ha *due* soluzioni:

$$\alpha_1 \in [-2,-1] \qquad , \qquad \alpha_2 \in [0,2]$$

Verificato che l'equazione $h(x) = x$ è equivalente all'equazione data, e quindi i punti uniti di h sono α_1 e α_2, si constata immediatamente per via grafica che si ha:

$$0 < h'(\alpha_1) < 1 \quad \text{e} \quad h'(\alpha_2) > 1$$

Se ne deduce che il metodo iterativo definito da h *è utilizzabile* per approssimare α_1 (e risulta avere ordine di convergenza uno) e *non è utilizzabile* per approssimare α_2.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 7 giugno 2018

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare $\mathrm{rd}(\frac{8}{7})$ e decidere se

$$\delta(\tfrac{8}{7}) \leqslant \tfrac{1}{2}\,\beta^{b-m}$$

Problema 2

Sia $f(x) = x^4 - 6$.

(a) Dopo aver determinato il numero di zeri di f, per ciascuno di essi decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione.

(b) Sia $x_0 > 0$. Dimostrare che la successione x_k generata dal metodo di Newton applicato a f a partire da x_0 converge ad uno zero di f.

Problema 3

Sia $f(t) = t - t^2$.

(a) Determinare l'elemento p^* di $P_2(\mathbb{R})$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i campioni di f agli istanti $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1$.

(b) Calcolare lo scarto quadratico $\mathrm{SQ}(p^*)$.

Soluzione

Problema 1

Poiché:

$$\tfrac{8}{7} = 2^1\, 0.\overline{100}$$

i due elementi di M adiacenti ad $\frac{8}{7}$ sono:

$$\xi_- = 2^1\, 0.1001 \quad , \quad \xi_+ = 2^1\, 0.1010$$

Detto poi m il punto medio dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+ si ha:

$$m = 2^1\, 0.10011 \quad \text{e} \quad \tfrac{8}{7} < m$$

dunque:

$$\mathrm{rd}(\tfrac{8}{7}) = \xi_- = 2^1\, 0.1001 = \tfrac{9}{8}$$

Infine:

$$\delta(\tfrac{8}{7}) = \left|\, \mathrm{rd}(\tfrac{8}{7}) - \tfrac{8}{7} \,\right| = \tfrac{1}{56} < \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{2}\, \beta^{b-m}$$

Problema 2

(a) Si deduce immediatamente per via grafica che l'equazione ha *due* zeri: $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$. Poiché

$$f'(x) = 4\, x^3$$

si ha certamente $f'(\alpha_1) < 0$ e $f'(\alpha_2) > 0$, dunque il metodo di Newton è *certamente utilizzabile* per approssimare i due zeri.

(b) Siano $a \in (0, \alpha_2)$ e $y > \alpha_2$. Poiché per ogni $x \in [a, y]$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) = 12\, x^2 > 0$, il criterio di scelta del punto iniziale per il metodo di Newton prova che la successione generata dal metodo a partire da y converge ad α_2. Questo mostra l'asserto per $x_0 > \alpha_2$. Se $x_0 = \alpha_2$ l'asserto è evidente. Sia, infine, $x_0 \in (0, \alpha_2)$. Si verifica immediatamente (anche per via grafica) che per il *secondo* elemento, x_1, della successione generata dal metodo di Newton si ha $x_1 > \alpha_2$. Dunque, per quanto mostrato sopra, la successione generata a partire da x_1 converge ad α_2. Questo prova che anche la successione generata a partire da x_0 converge ad α_2..

Problema 3

Poiché f interpola i dati e $f \in P_2(\mathbb{R})$, si ha certamente $\mathrm{SQ}(f) = 0$. Allora $p^* = f$ e $\mathrm{SQ}(p^*) = 0$.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 28 giugno 2018

Problema 1

Siano $M = F(2,4)$ e:

$$A = \{\, \xi \in M \text{ tali che } 1 \leqslant \xi \leqslant 123 \,\}$$

Determinare il numero di elementi di A e $\max A$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathrm{EGP}(A)$ ed utilizzare il risultato per calcolare $\det A$.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che interpolano i dati:

$$(0,0) \quad , \quad (1,0)$$

Soluzione

Problema 1

Poiché $1 = 2^1\,0.1$ e $123 = 2^7\,0.1111011$, gli elementi di A sono tutti gli elementi di $F(2,4)$ da 1 a $2^7\,0.1111$. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, sia B_k l'insieme di tutti gli elementi positivi di $F(2,4)$ con esponente k. Essendo $1 = \min B_1$ e $2^7\,0.1111 = \max B_7$ si ha: $A = B_1 \cup \cdots \cup B_7$. Considerato che per ogni k l'insieme B_k ha 8 elementi, si conclude che: *A ha 56 elementi.* Inoltre: $\max A = 2^7\,0.1111 = 120$.

Problema 2

Si ottiene:

$$P = P_{23} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dal Teorema di Binet, essendo $PA = SD$, si ottiene poi: $\det A = \det P^{\mathsf{T}} \det S \det D = -1$.

Problema 3

Il problema è lineare di interpolazione. Le coordinate rispetto alla base di Newton di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1 \quad , \quad x \quad , \quad x(x-1)$$

degli elementi cercati sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha infinite soluzioni, descritte parametricamente da:

$$a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che interpolano i dati sono dunque infiniti e descritti parametricamente da:

$$a\,x(x-1) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 luglio 2018

Problema 1

Siano $M_2 = F(2, 10)$ e $M_{10} = F(10, 4)$. Posto:

$$A_2 = \{ \xi \in M_2 \text{ tali che } 1 \leqslant \xi \leqslant 2 \}$$

e

$$A_{10} = \{ \xi \in M_{10} \text{ tali che } 1 \leqslant \xi \leqslant 2 \}$$

decidere quale tra gli insiemi A_2 e A_{10} ha un numero maggiore di elementi.

Problema 2

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrici invertibili e $y \in \mathbb{R}^n$. Siano poi (U, T) una fattorizzazione QR di A e (S, D) una fattorizzazione LR di B. Indicare un procedimento che, utilizzando le funzioni SI ed SA, determina la soluzione del sistema di equazioni $ABx = y$.

Problema 3

Sia $F = \operatorname{span}\{ 1, 2^x \}$. Determinare l'elemento $f^* \in F$ che meglio approssima i dati

$$(0, 1) \quad , \quad (0, -1) \quad , \quad (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati e calcolare $\mathrm{SQ}(f^*)$.

Soluzione

Problema 1

Poiché:

$$1 = 2^1\,0.1 = 10^1\,0.1 \quad \text{e} \quad 2 = 2^2\,0.1 = 10^1\,0.2$$

si ha: A_2 è costituito da tutti gli elementi positivi di $F(2,10)$ con esponente uno e da $2^2\,0.1$, e: A_{10} è costituito da tutti gli elementi di $F(10,4)$ da $10^1\,0.1$ a $10^1\,0.2$. Dunque gli elementi di A_2 sono 513 e quelli di A_{10} sono 1001: *l'insieme A_{10} ha più elementi di A_2*.

Problema 2

Il procedimento:

(1) $c = \mathrm{SI}(T, U^\top y)$;
(2) $d = \mathrm{SA}(S, c)$;
(3) $x^* = \mathrm{SI}(D, d)$

determina la soluzione del sistema $ABx = y$. Si ha infatti: $Dx^* = d$, $Sd = c$ e $Tc = U^\top y$. Dunque: $y = UTc = UTSd = UTSDx^* = ABx^*$.

Si osservi che il procedimento termina certamente perché l'invertibilità di A e B garantisce quella dei fattori T e D.

Problema 3

Le coordinate (rispetto ai generatori $1, 2^x$) degli elementi cercati sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero le componenti delle soluzioni del sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha una sola soluzione: il vettore nullo. Esiste dunque *un solo* elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$f^*(x) = 0$$

e si ha: $\mathrm{SQ}(f^*) = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$.