Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 luglio 2018

Problema 1

Siano $M_2 = F(2, 10)$ e $M_{10} = F(10, 4)$. Posto:

$$A_2 = \{ \xi \in M_2 \text{ tali che } 1 \leqslant \xi \leqslant 2 \}$$

e

$$A_{10} = \{ \xi \in M_{10} \text{ tali che } 1 \leqslant \xi \leqslant 2 \}$$

decidere quale tra gli insiemi A_2 e A_{10} ha un numero maggiore di elementi.

Problema 2

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici invertibili e $y \in \mathbb{R}^n$. Siano poi (U, T) una fattorizzazione QR di A e (S, D) una fattorizzazione LR di B. Indicare un procedimento che, utilizzando le funzioni SI ed SA, determina la soluzione del sistema di equazioni $ABx = y$.

Problema 3

Sia $F = \operatorname{span}\{ 1, 2^x \}$. Determinare l'elemento $f^* \in F$ che meglio approssima i dati

$$(0, 1) \quad , \quad (0, -1) \quad , \quad (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati e calcolare $\mathrm{SQ}(f^*)$.

Soluzione

Problema 1

Poiché:

$$1 = 2^1\, 0.1 = 10^1\, 0.1 \quad \text{e} \quad 2 = 2^2\, 0.1 = 10^1\, 0.2$$

si ha: A_2 è costituito da tutti gli elementi positivi di $F(2, 10)$ con esponente uno e da $2^2\, 0.1$, e: A_{10} è costituito da tutti gli elementi di $F(10, 4)$ da $10^1\, 0.1$ a $10^1\, 0.2$. Dunque gli elementi di A_2 sono 513 e quelli di A_{10} sono 1001: *l'insieme A_{10} ha più elementi di A_2*.

Problema 2

Il procedimento:

(1) $c = \mathrm{SI}(T, U^{\mathsf{T}} y)$;
(2) $d = \mathrm{SA}(S, c)$;
(3) $x^* = \mathrm{SI}(D, d)$

determina la soluzione del sistema $ABx = y$. Si ha infatti: $Dx^* = d$, $Sd = c$ e $Tc = U^{\mathsf{T}} y$. Dunque: $y = UTc = UTSd = UTSDx^* = ABx^*$.

Si osservi che il procedimento termina certamente perché l'invertibilità di A e B garantisce quella dei fattori T e D.

Problema 3

Le coordinate (rispetto ai generatori $1, 2^x$) degli elementi cercati sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero le componenti delle soluzioni del sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha una sola soluzione: il vettore nullo. Esiste dunque *un solo* elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$f^*(x) = 0$$

e si ha: $\mathrm{SQ}(f^*) = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$.