Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 28 giugno 2018

Problema 1

Siano $M = F(2,4)$ e:

$$A = \{\, \xi \in M \text{ tali che } 1 \leqslant \xi \leqslant 123 \,\}$$

Determinare il numero di elementi di A e $\max A$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathrm{EGP}(A)$ ed utilizzare il risultato per calcolare $\det A$.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che interpolano i dati:

$$(0,0) \quad , \quad (1,0)$$

Soluzione

Problema 1

Poiché $1 = 2^1\,0.1$ e $123 = 2^7\,0.1111011$, gli elementi di A sono tutti gli elementi di $F(2,4)$ da 1 a $2^7\,0.1111$. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, sia B_k l'insieme di tutti gli elementi positivi di $F(2,4)$ con esponente k. Essendo $1 = \min B_1$ e $2^7\,0.1111 = \max B_7$ si ha: $A = B_1 \cup \cdots \cup B_7$. Considerato che per ogni k l'insieme B_k ha 8 elementi, si conclude che: *A ha 56 elementi.* Inoltre: $\max A = 2^7\,0.1111 = 120$.

Problema 2

Si ottiene:

$$P = P_{23} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dal Teorema di Binet, essendo $PA = SD$, si ottiene poi: $\det A = \det P^{\mathsf{T}} \det S \det D = -1$.

Problema 3

Il problema è lineare di interpolazione. Le coordinate rispetto alla base di Newton di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1 \quad , \quad x \quad , \quad x(x-1)$$

degli elementi cercati sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha infinite soluzioni, descritte parametricamente da:

$$a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che interpolano i dati sono dunque infiniti e descritti parametricamente da:

$$a\,x(x-1) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$