UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 7 giugno 2018

Problema 1

Sia $M = F(2, 4)$. Determinare $\mathrm{rd}(\frac{8}{7})$ e decidere se

$$\delta(\tfrac{8}{7}) \leqslant \tfrac{1}{2}\,\beta^{b-m}$$

Problema 2

Sia $f(x) = x^4 - 6$.

(a) Dopo aver determinato il numero di zeri di f, per ciascuno di essi decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione.

(b) Sia $x_0 > 0$. Dimostrare che la successione x_k generata dal metodo di Newton applicato a f a partire da x_0 converge ad uno zero di f.

Problema 3

Sia $f(t) = t - t^2$.

(a) Determinare l'elemento p^* di $P_2(\mathbb{R})$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i campioni di f agli istanti $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1$.

(b) Calcolare lo scarto quadratico $\mathrm{SQ}(p^*)$.

Soluzione

Problema 1

Poiché:

$$\tfrac{8}{7} = 2^1\,0.\overline{100}$$

i due elementi di M adiacenti ad $\frac{8}{7}$ sono:

$$\xi_- = 2^1\,0.1001 \quad , \quad \xi_+ = 2^1\,0.1010$$

Detto poi m il punto medio dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+ si ha:

$$m = 2^1\,0.10011 \quad \text{e} \quad \tfrac{8}{7} < m$$

dunque:

$$\mathrm{rd}(\tfrac{8}{7}) = \xi_- = 2^1\,0.1001 = \tfrac{9}{8}$$

Infine:

$$\delta(\tfrac{8}{7}) = \left|\,\mathrm{rd}(\tfrac{8}{7}) - \tfrac{8}{7}\,\right| = \tfrac{1}{56} < \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{2}\,\beta^{b-m}$$

Problema 2

(a) Si deduce immediatamente per via grafica che l'equazione ha *due* zeri: $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$. Poiché

$$f'(x) = 4\,x^3$$

si ha certamente $f'(\alpha_1) < 0$ e $f'(\alpha_2) > 0$, dunque il metodo di Newton è *certamente utilizzabile* per approssimare i due zeri.

(b) Siano $a \in (0, \alpha_2)$ e $y > \alpha_2$. Poiché per ogni $x \in [a, y]$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) = 12\,x^2 > 0$, il criterio di scelta del punto iniziale per il metodo di Newton prova che la successione generata dal metodo a partire da y converge ad α_2. Questo mostra l'asserto per $x_0 > \alpha_2$. Se $x_0 = \alpha_2$ l'asserto è evidente. Sia, infine, $x_0 \in (0, \alpha_2)$. Si verifica immediatamente (anche per via grafica) che per il *secondo* elemento, x_1, della successione generata dal metodo di Newton si ha $x_1 > \alpha_2$. Dunque, per quanto mostrato sopra, la successione generata a partire da x_1 converge ad α_2. Questo prova che anche la successione generata a partire da x_0 converge ad α_2..

Problema 3

Poiché f interpola i dati e $f \in P_2(\mathbb{R})$, si ha certamente $\mathrm{SQ}(f) = 0$. Allora $p^* = f$ e $\mathrm{SQ}(p^*) = 0$.