UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 febbraio 2018

Problema 1

Siano $M = F(2,3), \xi_1 = \frac{7}{4}$ e $\xi_2 = \frac{3}{8}$. Dopo aver verificato che ξ_1 e ξ_2 sono elementi di M, determinare $\xi_1 \otimes \xi_2$.

Problema 2

Siano x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e $\hat{x}$ la soluzione del sistema perturbato $Ax = b + \delta b$. Posto che:

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad c_1(A) = 10$$

e le colonne $b, \delta b$ sono tali che:

$$\epsilon_b = \frac{\| \delta b \|_1}{\| b \|_1} = \frac{1}{30}$$

determinare una limitazione superiore per la misura relativa dello scostamento $\delta x = x^* - \hat{x}$:

$$\epsilon_x = \frac{\| \delta x \|_1}{\| x^* \|_1}$$

e rappresentare su un piano cartesiano l'insieme dei possibili valori di $\hat{x}$.

Problema 3

Si consideri l'equazione:

$$e^x - 1 = x + 1$$

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione, separarle, e per ciascuna di esse decidere se il metodo iterativo definito da:

$$h(x) = e^x - 2$$

sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

In base due si ha: sette = 111 e tre = 11. Allora:

$$\tfrac{7}{4} = 2^1\,0.111 \quad , \quad \tfrac{3}{8} = 2^{-1}\,0.11$$

ed entrambi risultano elementi di $F(2,3)$.

Si ha poi:

$$\tfrac{7}{4} \otimes \tfrac{3}{8} = \mathrm{rd}(2^1\,0.111 \cdot 2^{-1}\,0.11) = \mathrm{rd}(0.10101) = 0.101 = \tfrac{5}{8}$$

Problema 2

Il Teorema di Condizionamento afferma che per ogni b ed ogni δb si ha:

$$\epsilon_x \leqslant c_1(A)\epsilon_b = 10 \cdot \tfrac{1}{30} = \tfrac{1}{3}$$

Essendo poi $\| x^* \|_1 = 3$ la limitazione ottenuta è equivalente a:

$$\| \delta x \|_1 \leqslant \tfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Ricordato che $\delta x = \hat{x} - x^*$, l'insieme dei possibili valori di $\hat{x}$, facilmente rappresentabile, è:

$$\hat{x} = x^* + \delta x \quad \text{con} \quad \delta x \in I_1(0,1)$$

ovvero $I_1(x^*, 1)$.

Problema 3

Rappresentati i grafici delle funzioni $y = e^x - 1$ e $y = x + 1$ si constata facilmente che l'equazione ha *due* soluzioni:

$$\alpha_1 \in [-2, -1] \qquad , \qquad \alpha_2 \in [0, 2]$$

Verificato che l'equazione $h(x) = x$ è equivalente all'equazione data, e quindi i punti uniti di h sono α_1 e α_2, si constata immediatamente per via grafica che si ha:

$$0 < h'(\alpha_1) < 1 \quad \text{e} \quad h'(\alpha_2) > 1$$

Se ne deduce che il metodo iterativo definito da h *è utilizzabile* per approssimare α_1 (e risulta avere ordine di convergenza uno) e *non è utilizzabile* per approssimare α_2.