UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'1 febbraio 2018

Problema 1

Siano rd la funzione arrotondamento in $M = F(2, 53)$ e δ la funzione errore assoluto definita, per ogni numero reale x, da:

$$\delta(x) = \mathrm{rd}(x) - x$$

Determinare:

$$\max_{x \in [1,3]} |\, \delta(x) \,|$$

Problema 2

Sia $H \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matrice elementare di Gauss tale che:

$$H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Dopo aver determinato H e completato l'uguaglianza (ovvero determinato *tutti* i valori degli elementi indicati con $\times$), calcolare H^{-1} e $c_\infty(H)$.

Problema 3

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \ln x - e^{-x}$$

Dopo aver determinato il *numero di zeri* di f ed averli *separati*, per ciascuno zero si decida se il *metodo di Newton* sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermetivo, si indichi un valore x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo risulti convergente allo zero.

Soluzione

Problema 1

Sia b l'esponente in base β di x. Allora si ha:

$$|\,\delta(x)\,| \leqslant \tfrac{1}{2}\beta^{b-m}$$

e l'uguaglianza sussiste ogni volta che x è equidistante dai due elementi di M ad esso adiacenti. Nel caso in esame si ha $\beta = 2, m = 53$ e $1 \leqslant b \leqslant 2$, quindi:

$$\max_{x\in[1,3]} |\,\delta(x)\,| = 2^{2-54} = 2^{-52}$$

Problema 2

L'uguaglianza determina un'unica matrice elementare di Gauss:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene allora:

$$H \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $c_\infty(H) = \|\,H\,\|_\infty \|\,H^{-1}\,\|_\infty = 2 \cdot 2 = 4$.

Problema 3

La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato. In particolare:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x}$$

Dalla prima uguaglianza si deduce che per ogni x nel dominio di f si ha $f'(x) > 0$, dunque f ha *al più* uno zero. Osservando i grafici delle funzioni $y = \ln x$ e $y = e^{-x}$ si deduce che f ha uno zero α separato dall'intervallo $[1, e]$.

Poiché si ha certamente $f'(\alpha) \neq 0$, il metodo di Newton è certamente utilizzabile e, essendo $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [1, e]$ un valore iniziale che garantisce la convergenza della successione generata dal metodo di Newton è $x_0 = 1$.