UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'11 gennaio 2018

Problema 1

Determinare quanti elementi di $F(2,9) \cap [\frac{1}{3}, 2]$ hanno esponente *uno* in base due.

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice invertibile e $B = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Indicare un procedimento che, utilizzando SA, SI ed EGP, determina *la matrice* $X = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tale che:

$$AX = B$$

e calcolare il *costo aritmetico* del procedimento in funzione di n ed r.

Problema 3

La massa m di un corpo omogeneo di densità ρ è proporzionale al volume V:

$$m = \rho V$$

Da alcune misure su vari oggetti costituiti di uno stesso materiale omogeneo si ottengono i *dati*:

V	1	2	4
m	3.5	6.25	11

Determinare il valore ρ^* della densità che individua, tra tutte le funzioni della forma ρV, quella che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Indichiamo con B_1 l'insieme degli elementi di $F(2,9)$ con esponente *uno*. Poiché sia l'elemento più piccolo di B_1, $2^1\,0.1$, che il più grande, $2^1\,0.1\cdots 1 = \pi(2)$, appartengono all'intervallo $[\frac{1}{3}, 2]$, si ha $B_1 \subset [\frac{1}{3}, 2]$. Dunque gli elementi cercati sono tanti quanti i possibili valori della frazione in $F(2,9)$, ovvero: $2^8 = 256$.

Problema 2

Per $k = 1, \ldots, r$ la colonna x_k è la soluzione del sistema $Ax = b_k$. Allora, tenuto conto che tutti i sistemi da risolvere hanno *la stessa matrice* dei coefficienti, il procedimento è:

$[S, D, P] = \mathrm{EGP}(A)$

`per` $k = 1, \ldots, r$ `ripeti`:
$c = \mathrm{SA}(S, Pb_k)$;
$x_k = \mathrm{SI}(D, c)$;

$X = (x_1 \ldots, x_r)$.

Il costo del procedimento è:

$$\text{costo EGP} + r(\text{costo SA} + \text{costo SI})$$

ovvero:

$$\tfrac{2}{3}\,n^3 - \tfrac{1}{2}\,n^2 - \tfrac{1}{6}\,n + 2rn^2$$

Problema 3

Il valore ρ^* cercato è la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema che traduce le condizioni di interpolazione:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rho = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 6.25 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ovvero la soluzione del sistema delle *equazioni normali*:

$$21\rho = 60$$

quindi:

$$\rho^* = \tfrac{60}{21} = \tfrac{20}{7}$$