UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 12 gennaio 2017

Problema 1

Si consideri il seguente dialogo in *Scilab*:

```
-->u = number_properties('eps')
 u  =

    1.110D-16

-->x = u^2;

-->[f,e] = frexp(x);
```

Determinare il valore di `f` ed `e` dopo l'ultimo assegnamento.

Problema 2

Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$h(x) = e^x - 4$$

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti decidere se il metodo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo operando in $\mathbb{R}$ è convergente al punto unito in esame.

Problema 3

Determinare gli elementi di span $\{ 1, 2^x \}$ che meglio approssimano i dati:

x_k	2	0	1	0
y_k	0	0	1	0

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Ricordando che `number_properties('eps')` restituisce la *precisione di macchina*, il primo assegnamento produce: `u` $= 2^{-53}$. Il secondo: `x` $= \mathrm{rd}(2^{-106}) = 2^{-106} = 2^{-105} \cdot 0.1$. Ricordando infine che la funzione `frexp` restituisce, nell'ordine, la *frazione* con segno e l'*esponente* in base due di un elemento di $F(2, 53)$ si ha:

$$\mathtt{f} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mathtt{e} = -105$$

Problema 2

(a) Sia $f(x) = h(x) - x = e^x - 4 - x$. Gli zeri di f sono *tutti e soli* i punti uniti di h. Inoltre: per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f''(x) \neq 0$, dunque f ha *al più* due zeri. Poi: $f(-4) > 0, f(0) < 0$ e $f(3) > 0$. Il Teorema di esistenza degli zeri consente di concludere che f ha *due* zeri, e quindi h *due* punti uniti: $\alpha_1 \in [-4, 0]$ e $\alpha_2 \in [0, 3]$.

(b) Poiché $h'(x) = e^x$ si ha certamente: $0 < h'(\alpha_1) < 1$ e $h'(\alpha_2) > 1$. Le due condizioni sono *sufficienti* per stabilire che il metodo *è utilizzabile* per approssimare α_1 e *non è utilizzabile* per approssimare α_2. Essendo $f(-1) < 0$, un intervallo che verifica le condizioni (1) e (2) del Teorema di convergenza è $[-4, -1]$. Tenuto conto che per ogni $x \in [-4, -1]$ si ha $0 < h'(x) < L = e^{-1}$, si conclude che (i) la successione generata dal metodo definito da h a partire da *qualsiasi* $x_0 \in [-4, -1]$, operando in $\mathbb{R}$, è monotona e convergente ad α_1 e (ii) il metodo ha ordine di convergenza *uno* quando utilizzato per approssimare α_1.

Problema 3

Le coordinate (rispetto ai generatori $1, 2^x$) degli elementi cercati sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero le componenti delle soluzioni del sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 22 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha una sola soluzione:

$$c = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esiste dunque *un solo* elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$g(x) = \frac{1}{4}$$

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'1 febbraio 2017

Problema 1

Si considerino i seguenti assegnamenti in *Scilab*:

```
-->x = 0.1; y = x * x;
```

Stimare l'errore relativo commesso utilizzando il valore di `y` per approssimare $1/100$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathrm{EGP}(A)$ ed utilizzare il risultato per calcolare A^{-1} e $c_\infty(A)$.

Problema 3

Determinare gli elementi $p \in P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(0) = 1 \qquad , \qquad 2\int_0^1 p(t)\,dt = 1$$

Soluzione

Problema 1

Il valore di $\mathtt{x}$ è:

$$\xi = \mathrm{rd}(\tfrac{1}{10}) = (1 + e_1)\,\tfrac{1}{10}$$

con $e_1 \in \mathbb{R}$ tale che $|\, e_1 \,| \leqslant u$. Il valore di $\mathtt{y}$ è allora:

$$\mathrm{rd}(\xi^2) = (1 + e_2)\,\xi^2 = (1 + e_2)(1 + e_1)^2\,\tfrac{1}{100} = (1 + t)\,\tfrac{1}{100}$$

con $e_2 \in \mathbb{R}$ tale che $|\, e_2 \,| \leqslant u$ e:

$$t = 2e_1 + e_2 + e_1^2 + 2e_1e_2 + e_1^2e_2$$

L'errore relativo commesso nell'approssimazione è t e si ha:

$$|\, t \,| \leqslant 3u + 3u^2 + u^3 \approx 3u \approx 3 \cdot 10^{-16}$$

Problema 2

La procedura EGP opera così:

- Pone $A^{(1)} = A$
- Constata che $a_{11}^{(1)} = 0$ e $a_{21}^{(1)} \neq 0$, pone di conseguenza $P_1 = P_{12}$ e:

  $$B^{(1)} = P_1A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Essendo $b_{21}^{(1)} = b_{31}^{(1)} = 0$ determina $H_1 = I$ e pone $A^{(2)} = H_1B^{(1)} = B^{(1)}$
- Constata che $a_{22}^{(2)} \neq 0$, pone di conseguenza $P_2 = I$ e $B^{(2)} = P_2A^{(2)} = A^{(2)}$. Determina:

  $$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

  e pone:

  $$D = A^{(3)} = H_2B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Pone $P = P_2P_1 = P_{12}$
- Essendo $D = H_2P_{12}A$, ovvero $A = (P_{12}^{\mathsf{T}}H_2^{-1})D$, pone infine $S = P(P_{12}^{\mathsf{T}}H_2^{-1}) = H_2^{-1}$

e determina:

$$\mathrm{EGP}(A) = (S, D, P)$$

Poiché $PA = SD$, ovvero $A = P^\mathsf{T} SD$, essendo invertibile D lo è anche A e $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}P$. Si ha $S^{-1} = H_2$ e, utilizzando la procedura SI:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$c_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty = 3 \cdot 2 = 6$$

Problema 3

Si constata che gli operatori $L_0, L_1 : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiti da:

$$L_0(p) = p(0) \qquad , \qquad L_1(p) = 2 \int_0^1 p(t)\, dt$$

sono *lineari* e quindi il problema posto è *lineare di interpolazione*. Scelta la base $1, x$ di $P_1(\mathbb{R})$ il problema si riduce a determinare coefficienti $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha una sola soluzione ($a_0 = 1, a_1 = -1$) che individua l'unico elemento $p \in P_1(\mathbb{R})$ che verifica le condizioni:

$$p(x) = 1 - x$$

Università di Pisa

Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 20 febbraio 2017

Problema 1

Si consideri il seguente assegnamentio in *Scilab*:

```
-->x = %pi + 2;
```

dove `%pi` è una *costante* di valore $\mathrm{rd}(\pi)$. Stimare l'errore relativo commesso utilizzando il valore di `x` per approssimare $\pi + 2$.

Problema 2

Siano $\mathtt{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathtt{b} \in \mathbb{R}^n$ e si considerino i seguenti assegnamenti in *Scilab*:

```
-->[S, D, P] = lu(A);

-->c = SA(S,b);

-->x = SI(D,c);
```

Descrivere il valore di `x` nell'ipotesi che i tre assegnamenti terminino correttamente.

Problema 3

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$F(x) = e^x + x^2 - 3$$

(a) Determinare il numero di zeri di F e separarli.

(b) Per ciascuno degli zeri di F, decidere se il *metodo di Newton* sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo operando in $\mathbb{R}$ è convergente allo zero in esame.

Soluzione

Problema 1

Il valore di `x` è:

$$\mathrm{rd}\Big(\mathrm{rd}(\pi)+2\Big) = (1+e_1)\,\Big((1+e_0)\pi+2\Big)$$

con $e_0, e_1 \in \mathbb{R}$ tali che $|\,e_0\,| \leqslant u$ e $|\,e_1\,| \leqslant u$. Poiché:

$$(1+e_0)\pi+2 = \frac{(1+e_0)\,\pi+2}{\pi+2}\,(\pi+2) = \Big(1+\frac{\pi}{\pi+2}\,e_0\Big)\,(\pi+2)$$

l'errore relativo commesso nell'approssimazione è:

$$t = \frac{\pi}{\pi+2}\,e_0 + e_1 + \frac{\pi}{\pi+2}\,e_0e_1$$

Dunque, tenuto conto delle limitazioni per e_0 ed e_1:

$$|\,t\,| \leqslant \Big(\frac{\pi}{\pi+2}+1\Big)\,u + \frac{\pi}{\pi+2}\,u^2 \approx \Big(\frac{\pi}{\pi+2}+1\Big)\,u < 2u$$

Problema 2

Se gli ultimi due assegnamenti terminano correttamente, le matrici `S` e `D` sono *invertibili* e, posto $M = \mathtt{SD}$, `x` è un elemento di $\mathbb{R}^n$ ragionevolmente utilizzabile per approssimare *la* soluzione del sistema $Mx = \mathtt{b}$.

Problema 3

La funzione F ha derivate prima e seconda:

$$F'(x) = e^x + 2x \qquad , \qquad F''(x) = e^x + 2$$

Poiché $F''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione F ha *al più due zeri*. Inoltre:

$$F(-2) > 0 \quad , \quad F(0) < 0 \quad , \quad F(2) > 0$$

dunque F *ha due zeri*: $\alpha_1 \in (-2, 0)$ e $\alpha_2 \in (0, 2)$.

Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$, il metodo di Newton è *utilizzabile per approssimare* α_2 e *la successione generata a partire da* $x_0 = 2$ *è convergente ad* α_2 *e monotona decrescente.*

Invece, $F'(x) = 0$ per qualche $x \in [-2, 0]$. Però: (i) $F(-1) < 0$ e quindi $\alpha_1 \in (-2, -1)$ e (ii) $F'(-1) < 0$ e quindi, essendo $F''(x) > 0$ per ogni x, $F'(x) < 0$ per ogni $x \in [-2, -1]$. Allora il metodo di Newton è *utilizzabile per approssimare* α_1 e *la successione generata a partire da* $x_0 = -2$ *è convergente ad* α_1 *e monotona crescente.*

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'8 giugno 2017

Problema 1

Si consideri il seguente dialogo in *Scilab*:

```
-->z = 0.07 * 100;

-->z == 7
 ans  =

  F
```

Stimare l'errore relativo commesso utilizzando il valore di `z` per approssimare 7.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e x^* la soluzione del sistema $Ax = b$. Posto:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

interpretare $\tilde{x}$ come soluzione di un sistema della forma $Ax = b + f$ ed utilizzare il *Teorema di condizionamento* per ottenere una stima dell'errore relativo:

$$\epsilon_x = \frac{\| \tilde{x} - x^* \|_1}{\| x^* \|_1}$$

commesso approssimando x^* con $\tilde{x}$.

Problema 3

Per ogni numero intero non negativo n sia:

$$f(n) = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$$

(a) Calcolare f per $n = 0, 1, 2, 3$.

(b) Posto che $f \in P_3(n)$, determinare f in *forma di Newton*.

Soluzione

Problema 1

Piochè $0.07 = 7/100 \notin F(2,53)$ e $100 \in F(2,53)$ si ha:

$$\mathtt{z} = \mathrm{rd}(0.07) \otimes 100 = \mathrm{rd}\Big(\mathrm{rd}(7/100)\,100\Big)$$

Esistono allora numeri reali ϵ ed e tali che, detta u la precisione di macchina in $F(2,53)$:

$$\mathtt{z} = \tfrac{7}{100}\,(1+\epsilon)\,100\,(1+e) \qquad \text{e} \qquad |\,\epsilon\,| \leqslant u\,,\ |\,e\,| \leqslant u$$

Dunque:

$$\mathtt{z} = 7\,(1+\epsilon)(1+e) = 7\,(1+t)$$

con:

$$t = \epsilon + e + \epsilon e$$

errore relativo commesso approssimando 7 con il valore di `z`. In base alle limitazioni su ϵ ed e si ottiene:

$$|\,t\,| \leqslant 2u + u^2 \approx 2 \cdot 10^{-16}$$

Un'analisi più approfondita mostra che il valore di `z` è *il successore* di 7:

```
-->z == nearfloat('succ',7)
 ans  =

  T
```

e quindi, poiché l'esponente di 7 in base due è 3 e quindi la distanza tra 7 ed il successore è $8u$:

$$t = \frac{\sigma(7) - 7}{7} = \tfrac{8}{7}\,u$$

Problema 2

Il vettore $\tilde{x}$ è soluzione del sistema $Ax = b + f$ se e solo se:

$$f = A\tilde{x} - b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In tal caso, detto $c_1(A)$ il numero di condizionamento della matrice A in norma uno, il Teorema di Condizionamento garantisce che:

$$\epsilon_x \leqslant c_1(A)\,\frac{\|\,f\,\|_1}{\|\,b\,\|_1}$$

Si ha:

$$\|\,f\,\|_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \|\,b\,\|_1 = 12$$

Ricavata poi (ad esempio con la procedura di sostituzione all'indietro):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$c_1(A) = \| A \|_1 \| A^{-1} \|_1 = \tfrac{11}{2}$$

Allora:

$$\epsilon_x \leqslant \tfrac{11}{24}$$

In effetti si ha:

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e:

$$\epsilon_x = \tfrac{1}{19} < \tfrac{11}{24}$$

Problema 3

Poiché:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1 \quad , \quad f(2) = 5 \quad \text{e} \quad f(3) = 14$$

si tratta di determinare la forma di Newton dell'elemento di $P_3(\mathbb{R})$ che interpola i dati:

$$(0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (2,5) \quad , \quad (3,14)$$

Scelta per $P_3(\mathbb{R})$ la base:

$$1 \, , \, x \, , \, x(x-1) \, , \, x(x-1)(x-2)$$

i coefficienti che individuano l'elemento cercato sono le componenti della soluzione del sistema di equazioni lineari (con matrice *triangolare inferiore*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Risolto il sistema con la procedura di sostituzione in avanti si ottiene:

$$f(n) = n + \tfrac{3}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

Università di Pisa

Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 giugno 2017

Problema 1

Si consideri la seguente *function Scilab*:

```
function y = Area(r)
  \\ r: numero reale non negativo.
  y = %pi * (r * r);
endfunction
```

Dopo aver descritto il valore di `y` in termini di *funzione arrotondamento* e *funzioni predefinite*, discutere l'accuratezza dell'algoritmo `Area` quando utilizzato per approssimare la funzione F definita, per ogni numero reale non negativo r, da $F(r) = \pi r^2$.

Problema 2

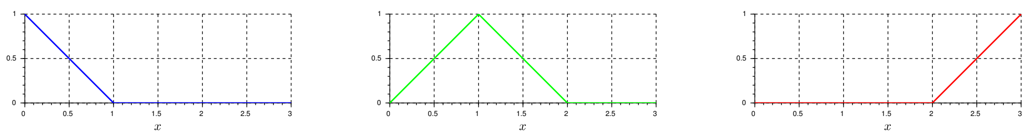
Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = \frac{1}{2}\, x \operatorname{sen} x$. Detta x_k la successione generata dal metodo iterativo definito da h a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$, determinare i possibili $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

e dimostrare che ciascuno di tali valori è *zero* della funzione $F(x) = 4x - 2x \operatorname{sen} x$. Decidere infine se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per approssimare gli zeri di F.

Problema 3

Siano s_0, s_1 ed s_3 le funzioni da $[0, 3]$ in $\mathbb{R}$ definite dai grafici, rispettivamente, in blu, verde e rosso rappresentati in figura.



Determinare gli elementi di $\operatorname{span}\{\, s_0, s_1, s_3 \,\}$ che meglio approssimano i dati: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Indicando con $\otimes$ la funzione predefinita corrispondente alla moltiplicazione e con rd la funzione arrotondamento in $F(2,53)$ si ha:

$$\texttt{Area}(r) = \mathrm{rd}(\pi) \otimes \Big(\mathrm{rd}(r) \otimes \mathrm{rd}(r)\Big)$$

Esistono allora numeri reali e_1, e_2, ϵ_1 ed ϵ_2 di grandezza non superiore alla precisione di macchina u in $F(2,53)$ tali che:

$$\texttt{Area}(r) = \pi(1+e_1)r^2(1+e_2)^2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)$$

Dunque:

$$\texttt{Area}(r) = F(r)(1+t)$$

con:

$$1+t = (1+e_1)(1+e_2)^2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)$$

In base alle limitazioni su e_1, e_2, ϵ_1 ed ϵ_2 si ottiene:

$$|\,t\,| \leqslant 5u + 10u^2 + 10u^3 + 5u^4 + u^5 \approx 5u$$

Se ne deduce che l'algoritmo `Area` *è accurato* quando utilizzato per approssimare i valori della funzione F.

Alla stessa conclusione si arriva constatando che l'algoritmo è *stabile* quando utilizzato per approssimare i valori della funzione F e che il calcolo di F è *ben condizionato*.

Problema 2

I possibili valori del limite α di una successione generata dal metodo ad un punto definito da h sono, essendo h una funzione *continua*, i *punti uniti* di h. Esiste dunque *un solo* valore possibile: $\alpha = 0$.

Inoltre, i punti uniti di h sono i numeri reali x tali che $h(x) = x$ ovvero tali che:

$$\tfrac{1}{2}\, x \operatorname{sen} x = x$$

equazione *equivalente* a:

$$4x - 2x \operatorname{sen} x = 0$$

I punti uniti sono quindi tutti e soli gli *zeri* di F.

Infine, essendo $h'(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + x \cos x)$, si ha $h'(0) = 0$ e la *condizione sufficiente* di utilizzabilità è soddisfatta. Inoltre, l'*ordine di convergenza* del metodo risulta *almeno due.*

Problema 3

I coefficienti delle combinazioni lineari che individuano gli elementi cercati sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema di equazioni lineari che traduce le *condizioni di interpolazione*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

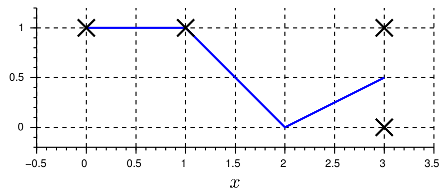
ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene *una sola combinazione lineare* che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$s_0 + s_1 + \tfrac{1}{2} s_3$$

In figura sono riportati il grafico dell'elemento trovato ed i dati da approssimare.



Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 20 luglio 2017

Problema 1

In $F(10, 2)$ si ottiene:

$$\text{rd}(\pi) = 3.1 \qquad , \qquad \text{rd}(\text{e}) = 2.7$$

Dare una stima dell'errore relativo commesso approssimando $x = \pi\text{e}$ con $y = 8.37 = \text{rd}(\pi)\text{rd}(\text{e})$.

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertibile*, $b \in \mathbb{R}^n$ e $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice di permutazione, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare inferiore tali che: $A = SCD$.

Dopo aver dimostrato che le matrici S e D sono invertibili, indicare un procedimento che utilizzando le procedure SA ed SI determina le soluzione x^* del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Sia $G = \text{span}\{\,1, x^2, \text{e}^x\,\}$.

(a) Determinare gli elementi $g \in G$ che verificano le condizioni:

$$g(0) = 0 \quad , \quad g'(0) = 0 \quad , \quad 1 \text{ è punto unito di } g$$

(b) Per ciascuno degli elementi g determinati nel punto precedente, decidere se il metodo iterativo definito da g sia utilizzabile per approssimare il punto unito 1.

Soluzione

Problema 1

La precisione di macchina in $F(10,2)$ è $u = \frac{1}{2}\,10^{1-2} = \frac{1}{20}$. Quindi esistono numeri reali e_1, e_2 tali che:

$$\mathrm{rd}(\pi) = \pi(1+e_1) \quad , \quad \mathrm{rd}(\mathrm{e}) = \mathrm{e}(1+e_2)$$

e $|\,e_1\,| \leqslant u$, $|\,e_2\,| \leqslant u$. Si riscrive allora:

$$y = \mathrm{rd}(\pi)\mathrm{rd}(\mathrm{e}) = \pi\mathrm{e}(1+e_1)(1+e_2) = x(1+t)$$

con $t = e_1 + e_2 + e_1 e_2$.

L'errore relativo commesso approssimando x con y è:

$$\frac{y-x}{x} = t$$

e si ha:

$$|\,t\,| = |\,e_1 + e_2 + e_1e_2\,| \leqslant |\,e_1\,| + |\,e_2\,| + |\,e_1\,|\,|\,e_2\,| \leqslant 2u + u^2 \approx 2u = \tfrac{1}{10}$$

Problema 2

Poiché $A = SCD$ allora $\det A = \det S \det C \det D$. La matrice C è di permutazione dunque $\det C \neq 0$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $\det S \neq 0$ e $\det D \neq 0$.

Infine, detto v il vettore soluzione del sistema $Sx = b$ e posto:

$$v = \mathrm{SI}(S, b) \quad , \quad y = \mathrm{SA}(D, C^{\mathsf{T}}v)$$

si ha $y = D^{-1}C^{\mathsf{T}}v = D^{-1}C^{\mathsf{T}}S^{-1}b = (SCD)^{-1}b = A^{-1}b = x^*$.

Problema 3

La condizione "1 è punto unito di g" si traduce in $g(1) = 1$. Il problema posto in (a) è quindi un problema lineare di interpolazione e i coefficienti delle $g \in G$ che soddisfano le richieste sono le componenti delle soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \mathrm{e} \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistena risulta avere *una sola* soluzione: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$. Dunque *un solo* elemento di G verifica le condizioni:

$$g(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot \mathrm{e}^x = x^2$$

Infine: essendo $g'(1) = 2 > 1$, la condizione sufficiente di *non* utilizzabilità è soddisfatta ed il metodo *non è utilizzabile* per approssimare il punto unito 1. Si osservi che, invece, si ha $g'(0) = 0$ e quindi è soddisfatta la condizione sufficiente di utilizzabilità ed il metodo risulta *utilizzabile* per approssimare il punto unito 0 (e l'ordine di convergenza risulta *almeno due*).