UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 20 luglio 2017

Problema 1

In $F(10, 2)$ si ottiene:

$$\mathrm{rd}(\pi) = 3.1 \qquad , \qquad \mathrm{rd}(\mathrm{e}) = 2.7$$

Dare una stima dell'errore relativo commesso approssimando $x = \pi\mathrm{e}$ con $y = 8.37 = \mathrm{rd}(\pi)\mathrm{rd}(\mathrm{e})$.

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertibile*, $b \in \mathbb{R}^n$ e $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice di permutazione, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare inferiore tali che: $A = SCD$.

Dopo aver dimostrato che le matrici S e D sono invertibili, indicare un procedimento che utilizzando le procedure SA ed SI determina le soluzione x^* del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Sia $G = \mathrm{span}\{\, 1, x^2, \mathrm{e}^x \,\}$.

(a) Determinare gli elementi $g \in G$ che verificano le condizioni:

$$g(0) = 0 \quad , \quad g'(0) = 0 \quad , \quad 1 \text{ è punto unito di } g$$

(b) Per ciascuno degli elementi g determinati nel punto precedente, decidere se il metodo iterativo definito da g sia utilizzabile per approssimare il punto unito 1.

Soluzione

Problema 1

La precisione di macchina in $F(10,2)$ è $u = \frac{1}{2}\, 10^{1-2} = \frac{1}{20}$. Quindi esistono numeri reali e_1, e_2 tali che:

$$\mathrm{rd}(\pi) = \pi(1+e_1) \quad , \quad \mathrm{rd}(\mathrm{e}) = \mathrm{e}(1+e_2)$$

e $|\, e_1 \,| \leqslant u$, $|\, e_2 \,| \leqslant u$. Si riscrive allora:

$$y = \mathrm{rd}(\pi)\mathrm{rd}(\mathrm{e}) = \pi\mathrm{e}(1+e_1)(1+e_2) = x(1+t)$$

con $t = e_1 + e_2 + e_1 e_2$.

L'errore relativo commesso approssimando x con y è:

$$\frac{y-x}{x} = t$$

e si ha:

$$|\, t \,| = |\, e_1 + e_2 + e_1 e_2 \,| \leqslant |\, e_1 \,| + |\, e_2 \,| + |\, e_1 \,|\,|\, e_2 \,| \leqslant 2u + u^2 \approx 2u = \tfrac{1}{10}$$

Problema 2

Poiché $A = SCD$ allora $\det A = \det S \det C \det D$. La matrice C è di permutazione dunque $\det C \neq 0$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $\det S \neq 0$ e $\det D \neq 0$.

Infine, detto v il vettore soluzione del sistema $Sx = b$ e posto:

$$v = \mathrm{SI}(S, b) \quad , \quad y = \mathrm{SA}(D, C^{\mathsf{T}} v)$$

si ha $y = D^{-1}C^{\mathsf{T}}v = D^{-1}C^{\mathsf{T}}S^{-1}b = (SCD)^{-1}b = A^{-1}b = x^*$.

Problema 3

La condizione "1 è punto unito di g" si traduce in $g(1) = 1$. Il problema posto in (a) è quindi un problema lineare di interpolazione e i coefficienti delle $g \in G$ che soddisfano le richieste sono le componenti delle soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \mathrm{e} \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistena risulta avere *una sola* soluzione: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$. Dunque *un solo* elemento di G verifica le condizioni:

$$g(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot \mathrm{e}^x = x^2$$

Infine: essendo $g'(1) = 2 > 1$, la condizione sufficiente di *non* utilizzabilità è soddisfatta ed il metodo *non è utilizzabile* per approssimare il punto unito 1. Si osservi che, invece, si ha $g'(0) = 0$ e quindi è soddisfatta la condizione sufficiente di utilizzabilità ed il metodo risulta *utilizzabile* per approssimare il punto unito 0 (e l'ordine di convergenza risulta *almeno due*).