UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 giugno 2017

Problema 1

Si consideri la seguente *function Scilab*:

```
function y = Area(r)
  \\ r: numero reale non negativo.
  y = %pi * (r * r);
endfunction
```

Dopo aver descritto il valore di `y` in termini di *funzione arrotondamento* e *funzioni predefinite*, discutere l'accuratezza dell'algoritmo `Area` quando utilizzato per approssimare la funzione F definita, per ogni numero reale non negativo r, da $F(r) = \pi r^2$.

Problema 2

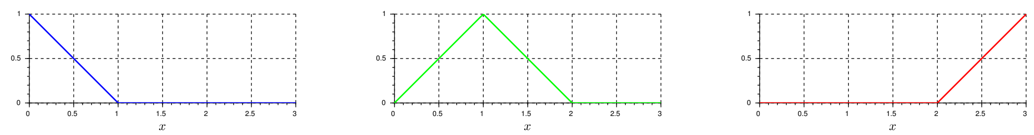
Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = \frac{1}{2}\, x \operatorname{sen} x$. Detta x_k la successione generata dal metodo iterativo definito da h a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$, determinare i possibili $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

e dimostrare che ciascuno di tali valori è *zero* della funzione $F(x) = 4x - 2x \operatorname{sen} x$. Decidere infine se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per approssimare gli zeri di F.

Problema 3

Siano s_0, s_1 ed s_3 le funzioni da $[0, 3]$ in $\mathbb{R}$ definite dai grafici, rispettivamente, in blu, verde e rosso rappresentati in figura.



Determinare gli elementi di $\operatorname{span}\{\, s_0, s_1, s_3 \,\}$ che meglio approssimano i dati: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Indicando con $\otimes$ la funzione predefinita corrispondente alla moltiplicazione e con rd la funzione arrotondamento in $F(2,53)$ si ha:

$$\texttt{Area(}r\texttt{)} = \mathrm{rd}(\pi) \otimes \Big(\mathrm{rd}(r) \otimes \mathrm{rd}(r)\Big)$$

Esistono allora numeri reali e_1, e_2, ϵ_1 ed ϵ_2 di grandezza non superiore alla precisione di macchina u in $F(2,53)$ tali che:

$$\texttt{Area(}r\texttt{)} = \pi(1+e_1)r^2(1+e_2)^2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)$$

Dunque:

$$\texttt{Area(}r\texttt{)} = F(r)(1+t)$$

con:

$$1+t = (1+e_1)(1+e_2)^2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)$$

In base alle limitazioni su e_1, e_2, ϵ_1 ed ϵ_2 si ottiene:

$$|\, t \,| \leqslant 5u + 10u^2 + 10u^3 + 5u^4 + u^5 \approx 5u$$

Se ne deduce che l'algoritmo `Area` *è accurato* quando utilizzato per approssimare i valori della funzione F.

Alla stessa conclusione si arriva constatando che l'algoritmo è *stabile* quando utilizzato per approssimare i valori della funzione F e che il calcolo di F è *ben condizionato*.

Problema 2

I possibili valori del limite α di una successione generata dal metodo ad un punto definito da h sono, essendo h una funzione *continua*, i *punti uniti* di h. Esiste dunque *un solo* valore possibile: $\alpha = 0$.

Inoltre, i punti uniti di h sono i numeri reali x tali che $h(x) = x$ ovvero tali che:

$$\tfrac{1}{2}\, x \,\mathrm{sen}\, x = x$$

equazione *equivalente* a:

$$4x - 2x \;\mathrm{sen}\, x = 0$$

I punti uniti sono quindi tutti e soli gli *zeri* di F.

Infine, essendo $h'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\, x + x\cos x)$, si ha $h'(0) = 0$ e la *condizione sufficiente* di utilizzabilità è soddisfatta. Inoltre, l'*ordine di convergenza* del metodo risulta *almeno due.*

Problema 3

I coefficienti delle combinazioni lineari che individuano gli elementi cercati sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema di equazioni lineari che traduce le *condizioni di interpolazione*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene *una sola combinazione lineare* che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$s_0 + s_1 + \frac{1}{2} s_3$$

In figura sono riportati il grafico dell'elemento trovato ed i dati da approssimare.