UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'8 giugno 2017

## Problema 1

Si consideri il seguente dialogo in *Scilab*:

```
-->z = 0.07 * 100;

-->z == 7
 ans  =

  F
```

Stimare l'errore relativo commesso utilizzando il valore di `z` per approssimare 7.

## Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e $x^*$ la soluzione del sistema $Ax = b$. Posto:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

interpretare $\tilde{x}$ come soluzione di un sistema della forma $Ax = b + f$ ed utilizzare il *Teorema di condizionamento* per ottenere una stima dell'errore relativo:

$$\epsilon_x = \frac{\| \tilde{x} - x^* \|_1}{\| x^* \|_1}$$

commesso approssimando $x^*$ con $\tilde{x}$.

## Problema 3

Per ogni numero intero non negativo $n$ sia:

$$f(n) = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$$

(a) Calcolare $f$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

(b) Posto che $f \in P_3(n)$, determinare $f$ in *forma di Newton*.

## Soluzione

### Problema 1

Piochè $0.07 = 7/100 \notin F(2,53)$ e $100 \in F(2,53)$ si ha:

$$\mathtt{z} = \mathrm{rd}(0.07) \otimes 100 = \mathrm{rd}\Big(\mathrm{rd}(7/100)\,100\Big)$$

Esistono allora numeri reali $\epsilon$ ed $e$ tali che, detta $u$ la precisione di macchina in $F(2,53)$:

$$\mathtt{z} = \tfrac{7}{100}\,(1+\epsilon)\,100\,(1+e) \qquad \text{e} \qquad |\,\epsilon\,| \leqslant u\,,\ |\,e\,| \leqslant u$$

Dunque:

$$\mathtt{z} = 7\,(1+\epsilon)(1+e) = 7\,(1+t)$$

con:

$$t = \epsilon + e + \epsilon e$$

errore relativo commesso approssimando 7 con il valore di $\mathtt{z}$. In base alle limitazioni su $\epsilon$ ed $e$ si ottiene:

$$|\,t\,| \leqslant 2u + u^2 \approx 2 \cdot 10^{-16}$$

Un'analisi più approfondita mostra che il valore di $\mathtt{z}$ è *il successore* di 7:

```
-->z == nearfloat('succ',7)
 ans  =

  T
```

e quindi, poiché l'esponente di 7 in base due è 3 e quindi la distanza tra 7 ed il successore è $8u$:

$$t = \frac{\sigma(7) - 7}{7} = \tfrac{8}{7}\,u$$

### Problema 2

Il vettore $\tilde{x}$ è soluzione del sistema $Ax = b + f$ se e solo se:

$$f = A\tilde{x} - b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In tal caso, detto $c_1(A)$ il numero di condizionamento della matrice $A$ in norma uno, il Teorema di Condizionamento garantisce che:

$$\epsilon_x \leqslant c_1(A)\,\frac{\|\,f\,\|_1}{\|\,b\,\|_1}$$

Si ha:

$$\|\,f\,\|_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \|\,b\,\|_1 = 12$$

Ricavata poi (ad esempio con la procedura di sostituzione all'indietro):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

si ottiene:
$$c_1(A) = \| A \|_1 \| A^{-1} \|_1 = \tfrac{11}{2}$$
Allora:
$$\epsilon_x \leqslant \tfrac{11}{24}$$

In effetti si ha:
$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$$
e:
$$\epsilon_x = \tfrac{1}{19} < \tfrac{11}{24}$$

Problema 3

Poiché:
$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1 \quad , \quad f(2) = 5 \quad \text{e} \quad f(3) = 14$$
si tratta di determinare la forma di Newton dell'elemento di $P_3(\mathbb{R})$ che interpola i dati:
$$(0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (2,5) \quad , \quad (3,14)$$
Scelta per $P_3(\mathbb{R})$ la base:
$$1 \, , \, x \, , \, x(x-1) \, , \, x(x-1)(x-2)$$
i coefficienti che individuano l'elemento cercato sono le componenti della soluzione del sistema di equazioni lineari (con matrice *triangolare inferiore*):
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$$
Risolto il sistema con la procedura di sostituzione in avanti si ottiene:
$$f(n) = n + \tfrac{3}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$