UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 20 febbraio 2017

Problema 1

Si consideri il seguente assegnamentio in *Scilab*:

```
-->x = %pi + 2;
```

dove `%pi` è una *costante* di valore $\mathrm{rd}(\pi)$. Stimare l'errore relativo commesso utilizzando il valore di `x` per approssimare $\pi + 2$.

Problema 2

Siano $\mathtt{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathtt{b} \in \mathbb{R}^n$ e si considerino i seguenti assegnamenti in *Scilab*:

```
-->[S, D, P] = lu(A);

-->c = SA(S,b);

-->x = SI(D,c);
```

Descrivere il valore di `x` nell'ipotesi che i tre assegnamenti terminino correttamente.

Problema 3

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$F(x) = e^x + x^2 - 3$$

(a) Determinare il numero di zeri di F e separarli.

(b) Per ciascuno degli zeri di F, decidere se il *metodo di Newton* sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo operando in $\mathbb{R}$ è convergente allo zero in esame.

Soluzione

Problema 1

Il valore di `x` è:

$$\mathrm{rd}\Big(\,\mathrm{rd}(\pi)+2\,\Big) = (1+e_1)\,\Big(\,(1+e_0)\pi+2\,\Big)$$

con $e_0, e_1 \in \mathbb{R}$ tali che $|\,e_0\,| \leqslant u$ e $|\,e_1\,| \leqslant u$. Poiché:

$$(1+e_0)\pi+2 = \frac{(1+e_0)\,\pi+2}{\pi+2}\,(\pi+2) = \Big(\,1+\frac{\pi}{\pi+2}\,e_0\,\Big)\,(\pi+2)$$

l'errore relativo commesso nell'approssimazione è:

$$t = \frac{\pi}{\pi+2}\,e_0 + e_1 + \frac{\pi}{\pi+2}\,e_0 e_1$$

Dunque, tenuto conto delle limitazioni per e_0 ed e_1:

$$|\,t\,| \leqslant \Big(\,\frac{\pi}{\pi+2}+1\,\Big)\,u + \frac{\pi}{\pi+2}\,u^2 \approx \Big(\,\frac{\pi}{\pi+2}+1\,\Big)\,u < 2u$$

Problema 2

Se gli ultimi due assegnamenti terminano correttamente, le matrici `S` e `D` sono *invertibili* e, posto $M = \mathtt{SD}$, `x` è un elemento di $\mathbb{R}^n$ ragionevolmente utilizzabile per approssimare *la* soluzione del sistema $Mx = \mathtt{b}$.

Problema 3

La funzione F ha derivate prima e seconda:

$$F'(x) = e^x + 2x \qquad , \qquad F''(x) = e^x + 2$$

Poiché $F''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione F ha *al più due zeri.* Inoltre:

$$F(-2) > 0 \quad , \quad F(0) < 0 \quad , \quad F(2) > 0$$

dunque *F ha due zeri*: $\alpha_1 \in (-2, 0)$ e $\alpha_2 \in (0, 2)$.

Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$, il metodo di Newton è *utilizzabile per approssimare* α_2 e *la successione generata a partire da $x_0 = 2$ è convergente ad α_2 e monotona decrescente.*

Invece, $F'(x) = 0$ per qualche $x \in [-2, 0]$. Però: (i) $F(-1) < 0$ e quindi $\alpha_1 \in (-2, -1)$ e (ii) $F'(-1) < 0$ e quindi, essendo $F''(x) > 0$ per ogni x, $F'(x) < 0$ per ogni $x \in [-2, -1]$. Allora il metodo di Newton è *utilizzabile per approssimare* α_1 e *la successione generata a partire da $x_0 = -2$ è convergente ad α_1 e monotona crescente.*