UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'1 febbraio 2017

Problema 1

Si considerino i seguenti assegnamenti in *Scilab*:

```
-->x = 0.1; y = x * x;
```

Stimare l'errore relativo commesso utilizzando il valore di `y` per approssimare $1/100$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathrm{EGP}(A)$ ed utilizzare il risultato per calcolare A^{-1} e $c_\infty(A)$.

Problema 3

Determinare gli elementi $p \in P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(0) = 1 \qquad , \qquad 2\int_0^1 p(t)\,dt = 1$$

Soluzione

Problema 1

Il valore di $\mathtt{x}$ è:

$$\xi = \mathrm{rd}(\tfrac{1}{10}) = (1+e_1)\,\tfrac{1}{10}$$

con $e_1 \in \mathbb{R}$ tale che $|\,e_1\,| \leqslant u$. Il valore di $\mathtt{y}$ è allora:

$$\mathrm{rd}(\xi^2) = (1+e_2)\,\xi^2 = (1+e_2)(1+e_1)^2\,\tfrac{1}{100} = (1+t)\,\tfrac{1}{100}$$

con $e_2 \in \mathbb{R}$ tale che $|\,e_2\,| \leqslant u$ e:

$$t = 2e_1 + e_2 + e_1^2 + 2e_1e_2 + e_1^2e_2$$

L'errore relativo commesso nell'approssimazione è t e si ha:

$$|\,t\,| \leqslant 3u + 3u^2 + u^3 \approx 3u \approx 3 \cdot 10^{-16}$$

Problema 2

La procedura EGP opera così:

- Pone $A^{(1)} = A$
- Constata che $a_{11}^{(1)} = 0$ e $a_{21}^{(1)} \neq 0$, pone di conseguenza $P_1 = P_{12}$ e:

  $$B^{(1)} = P_1A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Essendo $b_{21}^{(1)} = b_{31}^{(1)} = 0$ determina $H_1 = I$ e pone $A^{(2)} = H_1B^{(1)} = B^{(1)}$
- Constata che $a_{22}^{(2)} \neq 0$, pone di conseguenza $P_2 = I$ e $B^{(2)} = P_2A^{(2)} = A^{(2)}$. Determina:

  $$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

  e pone:

  $$D = A^{(3)} = H_2B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Pone $P = P_2P_1 = P_{12}$
- Essendo $D = H_2P_{12}A$, ovvero $A = (P_{12}^{\mathsf{T}}H_2^{-1})D$, pone infine $S = P(P_{12}^{\mathsf{T}}H_2^{-1}) = H_2^{-1}$

e determina:

$$\mathrm{EGP}(A) = (S, D, P)$$

Poiché $PA = SD$, ovvero $A = P^{\mathsf{T}} SD$, essendo invertibile D lo è anche A e $A^{-1} = D^{-1} S^{-1} P$. Si ha $S^{-1} = H_2$ e, utilizzando la procedura SI:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$c_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty = 3 \cdot 2 = 6$$

Problema 3

Si constata che gli operatori $L_0, L_1 : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiti da:

$$L_0(p) = p(0) \qquad , \qquad L_1(p) = 2 \int_0^1 p(t)\, dt$$

sono *lineari* e quindi il problema posto è *lineare di interpolazione*. Scelta la base $1, x$ di $P_1(\mathbb{R})$ il problema si riduce a determinare coefficienti $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha una sola soluzione $(a_0 = 1, a_1 = -1)$ che individua l'unico elemento $p \in P_1(\mathbb{R})$ che verifica le condizioni:

$$p(x) = 1 - x$$