UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 12 gennaio 2017

Problema 1

Si consideri il seguente dialogo in *Scilab*:

```
-->u = number_properties('eps')
 u  =

    1.110D-16

-->x = u^2;

-->[f,e] = frexp(x);
```

Determinare il valore di `f` ed `e` dopo l'ultimo assegnamento.

Problema 2

Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$h(x) = e^x - 4$$

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti decidere se il metodo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo operando in $\mathbb{R}$ è convergente al punto unito in esame.

Problema 3

Determinare gli elementi di span $\{ 1, 2^x \}$ che meglio approssimano i dati:

x_k	2	0	1	0
y_k	0	0	1	0

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Ricordando che `number_properties('eps')` restituisce la *precisione di macchina*, il primo assegnamento produce: $\mathtt{u} = 2^{-53}$. Il secondo: $\mathtt{x} = \mathrm{rd}(2^{-106}) = 2^{-106} = 2^{-105} \cdot 0.1$. Ricordando infine che la funzione `frexp` restituisce, nell'ordine, la *frazione* con segno e l'*esponente* in base due di un elemento di $F(2, 53)$ si ha:

$$\mathtt{f} = \tfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mathtt{e} = -105$$

Problema 2

(a) Sia $f(x) = h(x) - x = e^x - 4 - x$. Gli zeri di f sono *tutti e soli* i punti uniti di h. Inoltre: per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f''(x) \neq 0$, dunque f ha *al più* due zeri. Poi: $f(-4) > 0, f(0) < 0$ e $f(3) > 0$. Il Teorema di esistenza degli zeri consente di concludere che f ha *due* zeri, e quindi h *due* punti uniti: $\alpha_1 \in [-4, 0]$ e $\alpha_2 \in [0, 3]$.

(b) Poiché $h'(x) = e^x$ si ha certamente: $0 < h'(\alpha_1) < 1$ e $h'(\alpha_2) > 1$. Le due condizioni sono *sufficienti* per stabilire che il metodo *è utilizzabile* per approssimare α_1 e *non è utilizzabile* per approssimare α_2. Essendo $f(-1) < 0$, un intervallo che verifica le condizioni (1) e (2) del Teorema di convergenza è $[-4, -1]$. Tenuto conto che per ogni $x \in [-4, -1]$ si ha $0 < h'(x) < L = e^{-1}$, si conclude che (i) la successione generata dal metodo definito da h a partire da *qualsiasi* $x_0 \in [-4, -1]$, operando in $\mathbb{R}$, è monotona e convergente ad α_1 e (ii) il metodo ha ordine di convergenza *uno* quando utilizzato per approssimare α_1.

Problema 3

Le coordinate (rispetto ai generatori $1, 2^x$) degli elementi cercati sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero le componenti delle soluzioni del sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 22 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha una sola soluzione:

$$c = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esiste dunque *un solo* elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$g(x) = \tfrac{1}{4}$$