Università di Pisa

Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 14 gennaio 2016

Problema 1

Siano rd_2 la funzione arrotondamento in $F(2,5)$, rd_{10} la funzione arrotondamento in $F(10,2)$ e $x \in \mathbb{R}$ tale che: $\mathrm{rd}_2(x) = \mathrm{rd}_{10}(x) = 2$. Determinare il più piccolo intervallo che certamente contiene x.

Problema 2

Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la *norma infinito* e siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $b, \delta b \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\| b \| = 10 \quad , \quad \epsilon_b = \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} = \frac{1}{10}$$

(A) Disegnare in un piano cartesiano l'insieme di tutti i possibili vettori δb.

Dette x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e $x^* + \delta x$ la soluzione del sistema $Ax = b + \delta b$:

(B) determinare il massimo valore possibile di:

$$\epsilon_d = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|}$$

Problema 3

Determinare le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Problema 1

Siano π_2 e σ_2, rispettivamente, le funzioni predecessore e successore in $F(2,5)$ e π_{10} e σ_{10}, rispettivamente, le funzioni predecessore e successore in $F(10,2)$. Si ha:

$$\mathrm{rd}_2(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{\pi_2(2)+2}{2}\,;\,\tfrac{\sigma_2(2)+2}{2}\right] = I_2$$

e

$$\mathrm{rd}_{10}(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{\pi_{10}(2)+2}{2}\,;\,\tfrac{\sigma_{10}(2)+2}{2}\right] = I_{10}$$

dunque *il più piccolo intervallo che certamente contiene* x *è* $I_2 \cap I_{10}$. Si ottiene:

$$I_2 = \left[2 - \tfrac{1}{32}\,;\,2 + \tfrac{1}{16}\right] \quad \text{e} \quad I_{10} = \left[2 - \tfrac{5}{100}\,;\,2 + \tfrac{5}{100}\right]$$

Considerato che $\frac{1}{32} < \frac{5}{100} < \frac{1}{16}$ si ha (aiutarsi con un disegno):

$$I_2 \cap I_{10} = \left[2 - \tfrac{1}{32}\,;\,2 + \tfrac{5}{100}\right] = [1.96875\,;\,2.05]$$

Problema 2

(A) Essendo $\|\,b\,\| = 10$ e $\epsilon_b = \frac{1}{10}$, i possibili vettori δb sono quelli *sul bordo* dell'intorno di centro 0 e raggio 1 rappresentato in Figura 1.

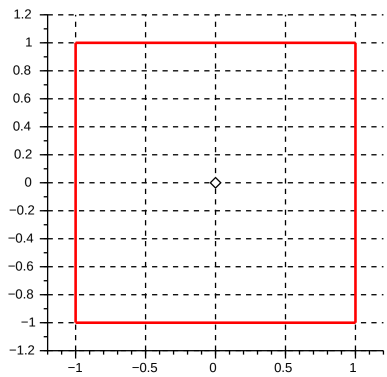

Figura 1: In rosso: il bordo dell'intorno di centro 0 e raggio 1. La losanga è il centro 0.

(B) Per il *Teorema di condizionamento*: assegnata una matrice A (1) per ogni b e δb si ha:

$$\epsilon_d \leqslant c(A)\epsilon_b$$

e (2) esistono b e δb tali che:

$$\epsilon_d = c(A)\epsilon_b$$

Nel caso in esame, dopo aver determinato:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene $c(A) = 2 \cdot 2 = 4$ e quindi *il massimo valore di* ϵ_d *è* $\frac{2}{5}$.
Nota. Il massimo valore di ϵ_d si ottiene, ad esempio, per:

$$\delta b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Infatti:

$$\max_{\|\delta b\|=1\,,\,\|b\|=10} \epsilon_d = \frac{\max_{\|\delta b\|=1} \|\delta x\|}{\min_{\|b\|=10} \|x^*\|}$$

Inoltre: (1) essendo $A\,\delta x = \delta b$ si ha: per ogni δb tale che $\|\delta b\| = 1$ vale: $\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|\delta b\| = 2$ e per il δb riportato sopra vale: $\|A^{-1}\delta b\| = \|A^{-1}\|\,\|\delta b\|$ ovvero $\|\delta x\| = \|A^{-1}\|\,\|\delta b\| = 2$; (2) essendo $Ax^* = b$ si ha: per ogni b tale che $\|b\| = 10$ vale: $\|b\| = \|Ax^*\| \leqslant \|A\|\,\|x^*\|$ e quindi $\|x^*\| \geqslant \frac{\|b\|}{\|A\|} = 5$ e per $x^* = A^{-1}b$, con b quello riportato sopra, vale: $\|Ax^*\| = \|A\|\,\|x^*\|$ ovvero $\|x^*\| = \frac{\|b\|}{\|A\|} = 5$.

Problema 3

Le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema sono le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione (come atteso):

$$x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 febbraio 2016

Problema 1

Sia $M = F(2, 53)$. Dimostrare che: *se* $\mathrm{rd}(x) > 2$ *allora* $x > 2$.

Problema 2

Applicando la procedura EGPP ad $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ si ottiene:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Calcolare $\det A$, A^{-1} e $c_\infty(A)$.

Problema 3

Sia $f(x) = x - e^{-x} - 2$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un valore x_0 a partire dal quale la successione generata da tale metodo, operando in $\mathbb{R}$, risulta convergente allo zero.

(c) Sia x_k la successione generata dal metodo di Newton a partire da $x_0 = 1$, operando in $\mathbb{R}$. Determinare

$$\lim_{k\to\infty} x_k$$

Soluzione

Problema 1

Si ha: $\mathrm{rd}(x) > 2 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{2+\sigma(2)}{2}$. Inoltre: $\sigma(2) > 2 \;\Rightarrow\; \frac{2+\sigma(2)}{2} > 2$. Dunque: $x > \frac{2+\sigma(2)}{2} > 2$.

Problema 2

Dette, nell'ordine S, D e P le tre matrici ottenute da EGPP, si constata che $P = I$ e quindi $A = SD$. Ne segue subito che $\det A = \det S \det D = -2$ e quindi A è invertibile.

L'inversa vale $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$ ed utilizzando, ad esempio, le procedure SA ed SI si ottiene:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Allora:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il numero di condizionamento di A in norma infinito vale $c_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty$. Dopo aver calcolato:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene $\| A \|_\infty = 5$, $\| A^{-1} \|_\infty = 2$ e quindi $c_\infty(A) = 10$.

Problema 3

(a) Poiché la derivata prima $f'(x) = 1 + e^{-x}$ è *non zero* per ogni x reale, la funzione f ha *al più uno zero*. Inoltre:

$$f(2) = -e^{-2} < 0 \quad \text{e} \quad f(3) = 1 - \frac{1}{e^3} > 0$$

e quindi f *ha uno zero*: $\alpha \in [2, 3]$.

(b) La funzione f ha derivata seconda continua e la derivata prima è *non zero* per ogni x reale, quindi $f'(\alpha) \neq 0$ ed il metodo di Newton è utilizzabile per approssimare lo zero. Inoltre $f''(x) = -e^{-x} \neq 0$ per ogni x reale e quindi è utilizzabile anche il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton e si ha: *con* $x_0 = 2$ *la successione risulta convergente ad* α e monotona crescente.

(c) Poichè l'intervallo $[1, 3]$ verifica le ipotesi che rendono utilizzabile il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton e $f(1)\, f''(1) > 0$ si deduce che *la successione è convergente ad* α:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 22 febbraio 2016

Problema 1

Siano $M = F(2, 4)$ ed $x = \frac{17}{16}$. Determinare $\mathrm{rd}(x)$ e verificare che l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$ non supera, in valore assoluto, la precisione di macchina u.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\mathrm{EGPP}(A)$.

Problema 3

Determinare la migliore approssimazione dei dati:

x_j	0	1	2	3	4	5
y_j	1	3	4	5	9	9

in $\mathrm{span}\{\, x \,\}$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

In base due si ha: $x = 2^1 \cdot 0.10001$ e quindi $\mathrm{rd}(x) = 1$. Allora, tenuto conto che $u = \frac{1}{2}\, 2^{1-4} = \frac{1}{16}$:

$$\left| \frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x} \right| = \frac{16}{17} \left| 1 - \frac{17}{16} \right| = \frac{1}{17} < u$$

Problema 2

Poiché le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti, la procedura terminerà correttamente con *due* passi di eliminazione.

(1) Essendo $a_{11}^{(1)} = 0$, occorre permutare le righe. Poniamo $P_1 = P_{12}$ ed eseguiamo il passo di eliminazione su $P_1 A$ utilizzando:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^{(2)} = H_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Essendo $a_{22}^{(2)} = 0$, occorre permutare le righe. Poniamo $P_2 = P_{23}$ ed eseguiamo il passo di eliminazione su $P_2 A^{(2)}$ utilizzando: $H_2 = I$. Si ottiene:

$$A^{(3)} = H_2 P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

La matrice di permutazione finale è:

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per determinare il fattore sinistro si riscrive:

$$D = P_2 H_2 A^{(2)} = P_{23} H_1 P_{12} A \quad \Rightarrow \quad A = P_{12}^{\mathsf{T}} H_1^{-1} P_{23}^{\mathsf{T}} D$$

Si ottiene infine:

$$S = P(P_{12}^{\mathsf{T}} H_1^{-1} P_{23}^{\mathsf{T}}) = P_{23} H_1^{-1} P_{23}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Complessivamente:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Problema 3

Si cerca $a_1 \in \mathbb{R}$ tale che, posto $p(x) = a_1 x$, la quantità

$$F(a_1) = (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 3)^2 + (p(2) - 4)^2 + (p(3) - 5)^2 + (p(4) - 9)^2 + (p(5) - 9)^2$$

risulti *minima*.

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

— ottenuto, ad esempio, imponendo le condizioni di interpolazione $p(x_j) = y_j, j = 0, \ldots, 5$ — ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*: $55\, a_1 = 107$. Si ottiene un'unica soluzione: $a_1 = \frac{107}{55}$ e quindi *un unico elemento che meglio approssima i dati*:

$$p(x) = \frac{107}{55}\, x$$

rappresentato, insieme ai dati, in Figura 1.

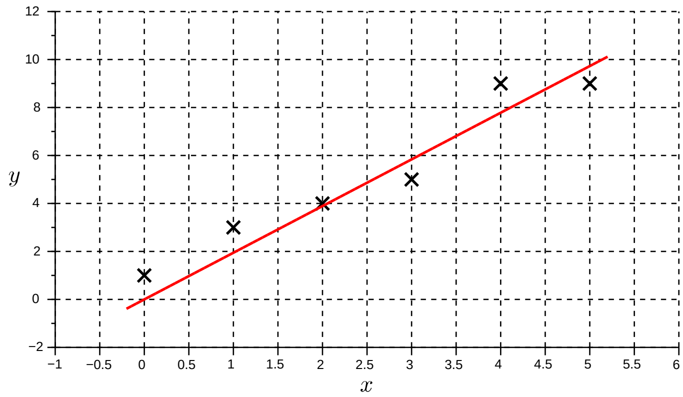

Figura 1: In rosso: la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.

Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 9 giugno 2016

Problema 1

Sia $M = F(2, 12)$. Calcolare $2 \oslash 5$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determiare EGP(A) ed utilizzare il risultato per calcolare $\det A$.

Problema 3

Determinare, in span$\{\,1, x^2\,\}$, la migliore approssimazione dei dati

$$(-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 1) \quad , \quad (2, 2)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Sia $x = \frac{2}{5}$. Per l'esponente b e la frazione g in base due di x si ha:

$$\tfrac{2}{5} \in (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad , \quad g = \tfrac{4}{5}$$

Dette $c_1, c_2, \ldots$ le cifre della scrittura posizionale di g in base due si ha:

$$\tfrac{4}{5} = 0.c_1c_2\cdots \quad \Rightarrow \quad \tfrac{8}{5} = c_1.c_2c_3\cdots$$

perció:

$$\tfrac{8}{5} = 1 + \tfrac{3}{5} = c_1 + 0.c_2c_3\cdots \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{e} \quad \tfrac{3}{5} = 0.c_2c_3\cdots$$

Ripetendo il ragionamento:

$$\tfrac{6}{5} = 1 + \tfrac{1}{5} = c_2 + 0.c_3c_4\cdots \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1 \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{5} = 0.c_3c_4\cdots$$

poi:

$$\tfrac{2}{5} = 0 + \tfrac{2}{5} = c_3 + 0.c_4c_5\cdots \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0 \quad \text{e} \quad \tfrac{2}{5} = 0.c_4c_5\cdots$$

Infine:

$$\tfrac{4}{5} = 0 + \tfrac{4}{5} = c_4 + 0.c_5c_6\cdots \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0 \quad \text{e} \quad \tfrac{4}{5} = 0.c_5c_6\cdots$$

Confrontando questa espressione con quella iniziale si ottiene:

$$\tfrac{4}{5} = 0.\overline{1100} \quad \text{e} \quad x = \tfrac{2}{5} = 2^{-1} \cdot 0.\overline{1100}$$

Gli elementi di M adiacenti ad x sono:

$$\xi_s = 2^{-1} \cdot 0.110011001100 \quad \text{e} \quad \xi_d = 2^{-1} \cdot 0.110011001101$$

ed il punto medio μ del segmento di estremi ξ_s, ξ_d è:

$$\mu = 2^{-1} \cdot 0.1100110011001$$

Poichè $\mu < x$:

$$2 \oslash 5 = \mathrm{rd}(x) = \xi_d = 2^{-1} \cdot 0.110011001101 = \frac{3277}{8192}$$

Problema 2

Passo 1: Essendo $a_{11}^{(1)} \neq 0$ si ha $P_1 = I$. Eseguiamo il passo di eliminazione su $P_1A = A$ utilizzando:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^{(2)} = H_1P_1A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Essendo $a_{22}^{(2)} \neq 0$ si ha $P_2 = I$. Eseguiamo il passo di eliminazione su $P_2A^{(2)} = A^{(2)}$ utilizzando: $H_2 = I$. Si ottiene: $A^{(3)} = H_2P_2A^{(2)} = A^{(2)}$.
Passo 3: Essendo $a_{33}^{(3)} \neq 0$ si ha $P_3 = I$. Eseguiamo il passo di eliminazione su $P_3A^{(3)} = A^{(3)}$ utilizzando:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^{(4)} = H_3P_3A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

La matrice di permutazione finale è:

$$P = P_3P_2P_1 = I$$

Per determinare il fattore sinistro si riscrive, tenuto conto che $P_1 = P_2 = P_3 = I$:

$$D = H_3H_2H_1A \quad \Rightarrow \quad A = H_1^{-1}H_2^{-1}H_3^{-1}D$$

Si ottiene infine:

$$S = P\,H_1^{-1}H_2^{-1}H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Complessivamente:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(I, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

Problema 3

Si cercano $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $g(x) = a_1 + a_2x^2$, la quantità

$$F(a_1, a_2) = (g(-1) - 1)^2 + (g(0) - 1)^2 + (g(1) - 1)^2 + (g(2) - 2)^2$$

risulti *minima*.

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione: $a_1 = \frac{15}{18}, a_2 = \frac{5}{18}$ e quindi *un unico elemento che meglio approssima i dati*:

$$g(x) = \frac{15}{18} + \frac{5}{18}\,x^2$$

rappresentato, insieme ai dati, in Figura 1.

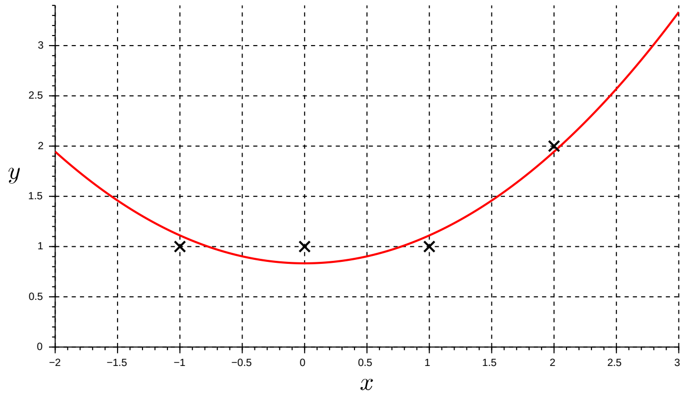

Figura 1: In rosso: la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.

Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 30 giugno 2016

Problema 1

Discutere la stabilità dell'algoritmo $\phi(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{rd}(x_1) \oplus (\mathrm{rd}(x_2) \otimes \mathrm{rd}(x_3))$ quando utilizzato per approssimare la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3$.

Problema 2

Sia: $h(x) = \arctan(x) + 1$.

(1) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(2) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo risulta, operando in $\mathbb{R}$, convergente.

Problema 3

Determinare gli elementi di $g \in P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni: $g(-1) = g(1) = 0$ e $g'(0) = 1$.

Soluzione

Problema 1

Per definizione di funzione arrotondamento e di pseudo-operazione aritmetica, detta u la precisione di macchina, per ogni x_2, x_2, x_3 si ha:

(1) esistono ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 tali che:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1(1+\epsilon_1) \oplus \Big(x_2(1+\epsilon_2) \otimes x_3(1+\epsilon_3)\Big)$$

e $|\,\epsilon_k\,| < u$, $k = 1, 2, 3$.

(2) esistono ϵ_4 e ϵ_5 tali che:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \Big(x_1(1+\epsilon_1) + x_2(1+\epsilon_2)x_3(1+\epsilon_3)(1+\epsilon_5)\Big)(1+\epsilon_4)$$

e $|\,\epsilon_4\,| < u$, $|\,\epsilon_5\,| < u$.

Posto: $(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_4) = (1+\theta_{14})$, $(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_4) = (1+\theta_{24})$ e $(1+\epsilon_3)(1+\epsilon_5) = (1+\theta_{35})$ si ottiene infine:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1(1+\theta_{14}) + x_2(1+\theta_{24})x_3(1+\theta_{35}) = f\Big(x_1(1+\theta_{14}), x_2(1+\theta_{24}), x_3(1+\theta_{35})\Big)$$

e, per ogni i, j: $|\,\theta_{ij}\,| < 2u + u^2 \approx 2u$.

Dunque, *per ogni x_1, x_2, x_3, l'algoritmo $\phi(x_1, x_2, x_3)$ è stabile quando utilizzato per approssimare $f(x_1, x_2, x_3)$.*

Problema 2

(1) Si consideri la funzione $F(x) = x - h(x) = x - \arctan(x) - 1$. Si ha:

- Gli zeri di F coincidono con i punti uniti di h;
- F è derivabile e:
$$F'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$
- Poiché $F(0) = -1$ e per ogni $x < 0$ si ha $F'(x) > 0$, allora $F(x)$ *non ha zeri nell'intervallo $x < 0$*;
- Poiché $F(3) = 2 - \arctan(3) > 0$ e per ogni $x > 0$ si ha $F'(x) > 0$, allora $F(x)$ *ha un unico zero, α, nell'intervallo $x > 0$.* Precisamente: $\alpha \in (0, 3)$.

(2) Si ha:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Dunque: $\alpha \in (0, 3) \Rightarrow 0 < |\,h'(\alpha)\,| < 1$ ed *il metodo definito da h è utilizzabile per approssimare α*, e risulta di *ordine uno.*

Per determinare un punto di partenza che garantisca la convergenza della successione, cerchiamo un intervallo che soddisfi le prime due ipotesi del Teorema di convergenza.

L'intervallo $[0,3]$ verifica la prima ipotesi ma *non* la seconda. Un intervallo che le verifica entrambe è $[1,3]$, che contiene α e:

$$\textit{per ogni } x \in [1,3] \textit{ si ha: } 0 < h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

Allora, *ogni* $x_0 \in [1,3]$ *genera una successione convergente ad* α *e monotona.*

Problema 3

Scelta $1, x, x^2$ come base di $P_2(\mathbb{R})$, si cercano coefficienti a_0, a_1 e a_2 tali che, posto $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ si abbia:

$$g(-1) = 0 \quad , \quad g(1) = 0 \quad , \quad g'(0) = 1$$

Si ottiene il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema risulta *incompatibile*, dunque *non esistono elementi di* $P_2(\mathbb{R})$ *che soddisfano le richieste.*

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 21 luglio 2016

Problema 1

Discutere il condizionamento del calcolo della funzione $f(x) = (x+2)^2$ in $x > 0$.

Problema 2

Si consideri $\mathbb{R}^4$ con la *norma infinito* e siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b \in \mathbb{R}^4$ tale che $\| b \| = 2$ e

$$f = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e $x^* + \delta x$ la soluzione del sistema $Ax = b + f$, determinare una limitazione superiore per:

$$\epsilon_d = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|}$$

Problema 3

Determinare la migliore approssimazione dei dati:

$$(0,1) \quad , \quad (1,4) \quad , \quad (2,6) \quad , \quad (3,10)$$

in span$\{ 2^x \}$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per $x > 0$ il *numero di condizionamento* (definito perchè f è non nulla ed ha derivata prima continua) vale:

$$c(f,x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2\,x}{x+2}$$

Poiché:

$$x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \frac{x}{x+2} < 1$$

per ogni $x > 0$ si ha $|\,c(f,x)\,| < 2$. Dunque: *il calcolo di f in x è ben condizionato per ogni $x > 0$.*

Problema 2

Per il *Teorema di condizionamento*: assegnata una matrice A, per ogni b ed f si ha:

$$\epsilon_d \leqslant c(A)\,\frac{\|\,f\,\|}{\|\,b\,\|}$$

Nel caso in esame, dopo aver determinato:

$$\frac{\|\,f\,\|}{\|\,b\,\|} = 10^{-3}$$

e:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene $c(A) = 5 \cdot 17 = 85$ e quindi *una limitazione superiore per ϵ_d è* $8.5 \cdot 10^{-2}$.

Nota. Una limitazione più precisa si ottiene considerando che:

$$\delta x = A^{-1} f = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e che essendo $Ax^* = b$ si ha $\|\,b\,\| = \|\,Ax^*\,\| \leqslant \|\,A\,\|\,\|\,x^*\,\|$ e quindi $\|\,x^*\,\| \geqslant \dfrac{\|\,b\,\|}{\|\,A\,\|}$. Allora:

$$\epsilon_d = \frac{\|\,\delta x\,\|}{\|\,x^*\,\|} = \frac{\|\,A^{-1} f\,\|}{\|\,x^*\,\|} \leqslant \|\,A\,\|\,\frac{\|\,A^{-1} f\,\|}{\|\,b\,\|} = 5\,\frac{10^{-3}}{2} = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

Problema 3

Si cerca $a \in \mathbb{R}$ tale che, posto $g(x) = a\,2^x$, risulti minimo lo *scarto quadratico*:

$$(g(0)-1)^2 + (g(1)-4)^2 + (g(2)-6)^2 + (g(3)-10)^2$$

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*: $85\,a = 113$. Si ottiene un'unica soluzione: $a = \frac{113}{85}$ e quindi *un unico elemento che meglio approssima i dati*:

$$g(x) = \frac{113}{85}\,2^x$$

rappresentato, insieme ai dati, in Figura 1.

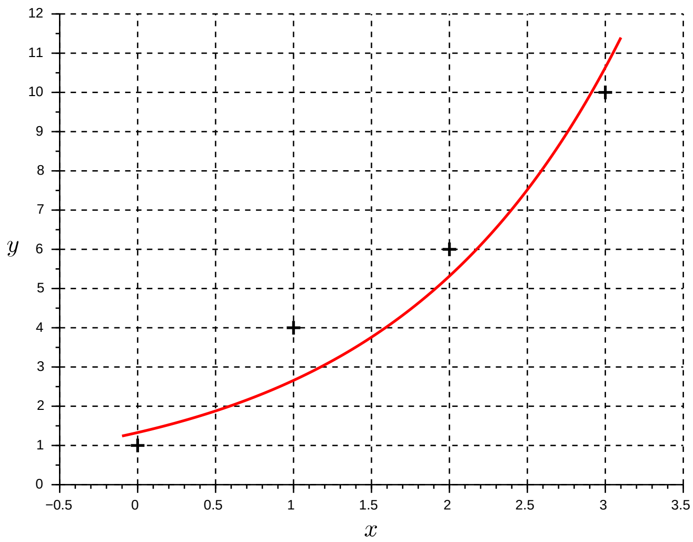

Figura 1: In rosso: la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.