UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 21 luglio 2016

Problema 1

Discutere il condizionamento del calcolo della funzione $f(x) = (x+2)^2$ in $x > 0$.

Problema 2

Si consideri $\mathbb{R}^4$ con la *norma infinito* e siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b \in \mathbb{R}^4$ tale che $\| b \| = 2$ e

$$f = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e $x^* + \delta x$ la soluzione del sistema $Ax = b + f$, determinare una limitazione superiore per:

$$\epsilon_d = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|}$$

Problema 3

Determinare la migliore approssimazione dei dati:

$$(0,1) \quad , \quad (1,4) \quad , \quad (2,6) \quad , \quad (3,10)$$

in span$\{ 2^x \}$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per $x > 0$ il *numero di condizionamento* (definito perchè f è non nulla ed ha derivata prima continua) vale:

$$c(f, x) = x \, \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2\,x}{x+2}$$

Poiché:

$$x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \frac{x}{x+2} < 1$$

per ogni $x > 0$ si ha $|\, c(f, x)\,| < 2$. Dunque: *il calcolo di f in x è ben condizionato per ogni $x > 0$.*

Problema 2

Per il *Teorema di condizionamento*: assegnata una matrice A, per ogni b ed f si ha:

$$\epsilon_d \leqslant c(A) \, \frac{\|\, f\,\|}{\|\, b\,\|}$$

Nel caso in esame, dopo aver determinato:

$$\frac{\|\, f\,\|}{\|\, b\,\|} = 10^{-3}$$

e:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene $c(A) = 5 \cdot 17 = 85$ e quindi *una limitazione superiore per ϵ_d è* $8.5 \cdot 10^{-2}$.

Nota. Una limitazione più precisa si ottiene considerando che:

$$\delta x = A^{-1} f = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e che essendo $Ax^* = b$ si ha $\|\, b\,\| = \|\, Ax^*\,\| \leqslant \|\, A\,\| \, \|\, x^*\,\|$ e quindi $\|\, x^*\,\| \geqslant \dfrac{\|\, b\,\|}{\|\, A\,\|}$. Allora:

$$\epsilon_d = \frac{\|\, \delta x\,\|}{\|\, x^*\,\|} = \frac{\|\, A^{-1} f\,\|}{\|\, x^*\,\|} \leqslant \|\, A\,\| \, \frac{\|\, A^{-1} f\,\|}{\|\, b\,\|} = 5 \, \frac{10^{-3}}{2} = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

Problema 3

Si cerca $a \in \mathbb{R}$ tale che, posto $g(x) = a\, 2^x$, risulti minimo lo *scarto quadratico*:

$$(g(0) - 1)^2 + (g(1) - 4)^2 + (g(2) - 6)^2 + (g(3) - 10)^2$$

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*: $85\,a = 113$. Si ottiene un'unica soluzione: $a = \frac{113}{85}$ e quindi *un unico elemento che meglio approssima i dati*:

$$g(x) = \frac{113}{85}\,2^x$$

rappresentato, insieme ai dati, in Figura 1.

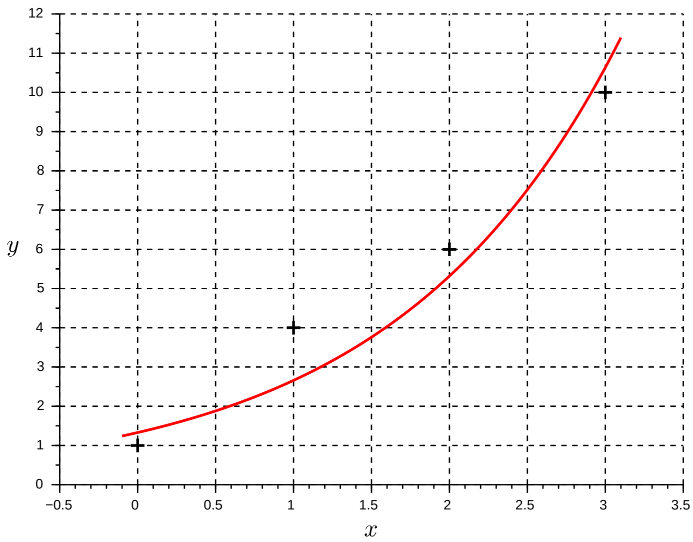

Figura 1: In rosso: la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.