UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 30 giugno 2016

Problema 1

Discutere la stabilità dell'algoritmo $\phi(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{rd}(x_1) \oplus (\mathrm{rd}(x_2) \otimes \mathrm{rd}(x_3))$ quando utilizzato per approssimare la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3$.

Problema 2

Sia: $h(x) = \arctan(x) + 1$.

(1) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(2) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo risulta, operando in $\mathbb{R}$, convergente.

Problema 3

Determinare gli elementi di $g \in P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni: $g(-1) = g(1) = 0$ e $g'(0) = 1$.

Soluzione

Problema 1

Per definizione di funzione arrotondamento e di pseudo-operazione aritmetica, detta u la precisione di macchina, per ogni x_2, x_2, x_3 si ha:

(1) esistono ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 tali che:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1(1+\epsilon_1) \oplus \Big(x_2(1+\epsilon_2) \otimes x_3(1+\epsilon_3)\Big)$$

e $|\,\epsilon_k\,| < u$, $k = 1, 2, 3$.

(2) esistono ϵ_4 e ϵ_5 tali che:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \Big(x_1(1+\epsilon_1) + x_2(1+\epsilon_2)x_3(1+\epsilon_3)(1+\epsilon_5)\Big)(1+\epsilon_4)$$

e $|\,\epsilon_4\,| < u$, $|\,\epsilon_5\,| < u$.

Posto: $(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_4) = (1+\theta_{14})$, $(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_4) = (1+\theta_{24})$ e $(1+\epsilon_3)(1+\epsilon_5) = (1+\theta_{35})$ si ottiene infine:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1(1+\theta_{14}) + x_2(1+\theta_{24})x_3(1+\theta_{35}) = f\Big(x_1(1+\theta_{14}), x_2(1+\theta_{24}), x_3(1+\theta_{35})\Big)$$

e, per ogni i, j: $|\,\theta_{ij}\,| < 2u + u^2 \approx 2u$.

Dunque, *per ogni* x_1, x_2, x_3*, l'algoritmo* $\phi(x_1, x_2, x_3)$ *è stabile quando utilizzato per approssimare* $f(x_1, x_2, x_3)$.

Problema 2

(1) Si consideri la funzione $F(x) = x - h(x) = x - \arctan(x) - 1$. Si ha:

- Gli zeri di F coincidono con i punti uniti di h;
- F è derivabile e:
$$F'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$
- Poiché $F(0) = -1$ e per ogni $x < 0$ si ha $F'(x) > 0$, allora $F(x)$ *non ha zeri nell'intervallo* $x < 0$;
- Poiché $F(3) = 2 - \arctan(3) > 0$ e per ogni $x > 0$ si ha $F'(x) > 0$, allora $F(x)$ *ha un unico zero,* α*, nell'intervallo* $x > 0$. Precisamente: $\alpha \in (0, 3)$.

(2) Si ha:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Dunque: $\alpha \in (0,3) \Rightarrow 0 < |\,h'(\alpha)\,| < 1$ ed *il metodo definito da* h *è utilizzabile per approssimare* α, e risulta di *ordine uno.*

Per determinare un punto di partenza che garantisca la convergenza della successione, cerchiamo un intervallo che soddisfi le prime due ipotesi del Teorema di convergenza.

L'intervallo $[0,3]$ verifica la prima ipotesi ma *non* la seconda. Un intervallo che le verifica entrambe è $[1,3]$, che contiene α e:

$$\textit{per ogni } x \in [1,3] \textit{ si ha: } 0 < h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

Allora, *ogni* $x_0 \in [1,3]$ *genera una successione convergente ad* α *e monotona.*

Problema 3

Scelta $1, x, x^2$ come base di $P_2(\mathbb{R})$, si cercano coefficienti a_0, a_1 e a_2 tali che, posto $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ si abbia:

$$g(-1) = 0 \quad , \quad g(1) = 0 \quad , \quad g'(0) = 1$$

Si ottiene il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema risulta *incompatibile*, dunque *non esistono elementi di* $P_2(\mathbb{R})$ *che soddisfano le richieste.*