UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 9 giugno 2016

Problema 1

Sia $M = F(2, 12)$. Calcolare $2 \oslash 5$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determiare $\mathrm{EGP}(A)$ ed utilizzare il risultato per calcolare $\det A$.

Problema 3

Determinare, in $\mathrm{span}\{1, x^2\}$, la migliore approssimazione dei dati

$$(-1,1) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (2,2)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Sia $x = \frac{2}{5}$. Per l'esponente b e la frazione g in base due di x si ha:

$$\tfrac{2}{5} \in (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad , \quad g = \tfrac{4}{5}$$

Dette $c_1, c_2, \ldots$ le cifre della scrittura posizionale di g in base due si ha:

$$\tfrac{4}{5} = 0.c_1c_2\cdots \quad \Rightarrow \quad \tfrac{8}{5} = c_1.c_2c_3\cdots$$

perció:

$$\tfrac{8}{5} = 1 + \tfrac{3}{5} = c_1 + 0.c_2c_3\cdots \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{e} \quad \tfrac{3}{5} = 0.c_2c_3\cdots$$

Ripetendo il ragionamento:

$$\tfrac{6}{5} = 1 + \tfrac{1}{5} = c_2 + 0.c_3c_4\cdots \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1 \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{5} = 0.c_3c_4\cdots$$

poi:

$$\tfrac{2}{5} = 0 + \tfrac{2}{5} = c_3 + 0.c_4c_5\cdots \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0 \quad \text{e} \quad \tfrac{2}{5} = 0.c_4c_5\cdots$$

Infine:

$$\tfrac{4}{5} = 0 + \tfrac{4}{5} = c_4 + 0.c_5c_6\cdots \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0 \quad \text{e} \quad \tfrac{4}{5} = 0.c_5c_6\cdots$$

Confrontando questa espressione con quella iniziale si ottiene:

$$\tfrac{4}{5} = 0.\overline{1100} \quad \text{e} \quad x = \tfrac{2}{5} = 2^{-1} \cdot 0.\overline{1100}$$

Gli elementi di M adiacenti ad x sono:

$$\xi_s = 2^{-1} \cdot 0.110011001100 \quad \text{e} \quad \xi_d = 2^{-1} \cdot 0.110011001101$$

ed il punto medio μ del segmento di estremi ξ_s, ξ_d è:

$$\mu = 2^{-1} \cdot 0.1100110011001$$

Poichè $\mu < x$:

$$2 \oslash 5 = \mathrm{rd}(x) = \xi_d = 2^{-1} \cdot 0.110011001101 = \frac{3277}{8192}$$

Problema 2

Passo 1: Essendo $a_{11}^{(1)} \neq 0$ si ha $P_1 = I$. Eseguiamo il passo di eliminazione su $P_1A = A$ utilizzando:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^{(2)} = H_1P_1A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Essendo $a_{22}^{(2)} \neq 0$ si ha $P_2 = I$. Eseguiamo il passo di eliminazione su $P_2 A^{(2)} = A^{(2)}$ utilizzando: $H_2 = I$. Si ottiene: $A^{(3)} = H_2 P_2 A^{(2)} = A^{(2)}$.
Passo 3: Essendo $a_{33}^{(3)} \neq 0$ si ha $P_3 = I$. Eseguiamo il passo di eliminazione su $P_3 A^{(3)} = A^{(3)}$ utilizzando:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^{(4)} = H_3 P_3 A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

La matrice di permutazione finale è:

$$P = P_3 P_2 P_1 = I$$

Per determinare il fattore sinistro si riscrive, tenuto conto che $P_1 = P_2 = P_3 = I$:

$$D = H_3 H_2 H_1 A \quad \Rightarrow \quad A = H_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1} D$$

Si ottiene infine:

$$S = P\, H_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Complessivamente:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(I, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

Problema 3

Si cercano $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $g(x) = a_1 + a_2 x^2$, la quantità

$$F(a_1, a_2) = (g(-1) - 1)^2 + (g(0) - 1)^2 + (g(1) - 1)^2 + (g(2) - 2)^2$$

risulti *minima.*

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione: $a_1 = \frac{15}{18}, a_2 = \frac{5}{18}$ e quindi *un unico elemento che meglio approssima i dati*:

$$g(x) = \frac{15}{18} + \frac{5}{18} x^2$$

rappresentato, insieme ai dati, in Figura 1.

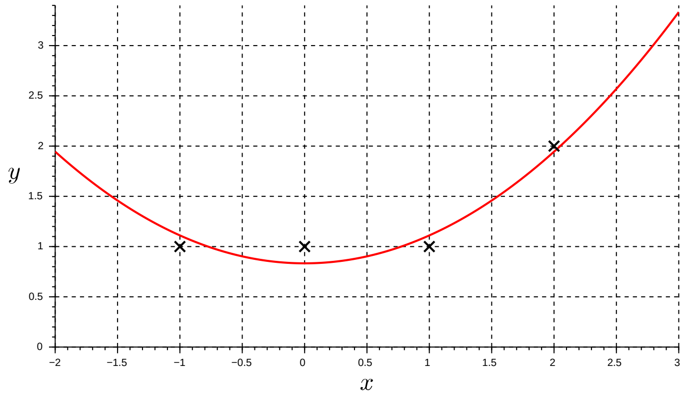

Figura 1: In rosso: la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.