UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 22 febbraio 2016

Problema 1

Siano $M = F(2,4)$ ed $x = \frac{17}{16}$. Determinare $\mathrm{rd}(x)$ e verificare che l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$ non supera, in valore assoluto, la precisione di macchina u.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\mathrm{EGPP}(A)$.

Problema 3

Determinare la migliore approssimazione dei dati:

x_j	0	1	2	3	4	5
y_j	1	3	4	5	9	9

in $\mathrm{span}\{\, x \,\}$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

In base due si ha: $x = 2^1 \cdot 0.10001$ e quindi $\mathrm{rd}(x) = 1$. Allora, tenuto conto che $u = \frac{1}{2}\,2^{1-4} = \frac{1}{16}$:

$$\left|\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x}\right| = \frac{16}{17}\left|1 - \frac{17}{16}\right| = \frac{1}{17} < u$$

Problema 2

Poiché le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti, la procedura terminerà correttamente con *due* passi di eliminazione.

(1) Essendo $a_{11}^{(1)} = 0$, occorre permutare le righe. Poniamo $P_1 = P_{12}$ ed eseguiamo il passo di eliminazione su $P_1 A$ utilizzando:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^{(2)} = H_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Essendo $a_{22}^{(2)} = 0$, occorre permutare le righe. Poniamo $P_2 = P_{23}$ ed eseguiamo il passo di eliminazione su $P_2 A^{(2)}$ utilizzando: $H_2 = I$. Si ottiene:

$$A^{(3)} = H_2 P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

La matrice di permutazione finale è:

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per determinare il fattore sinistro si riscrive:

$$D = P_2 H_2 A^{(2)} = P_{23} H_1 P_{12} A \quad \Rightarrow \quad A = P_{12}^{\mathsf{T}} H_1^{-1} P_{23}^{\mathsf{T}} D$$

Si ottiene infine:

$$S = P(P_{12}^{\mathsf{T}} H_1^{-1} P_{23}^{\mathsf{T}}) = P_{23} H_1^{-1} P_{23}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Complessivamente:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Problema 3

Si cerca $a_1 \in \mathbb{R}$ tale che, posto $p(x) = a_1 x$, la quantità

$$F(a_1) = (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 3)^2 + (p(2) - 4)^2 + (p(3) - 5)^2 + (p(4) - 9)^2 + (p(5) - 9)^2$$

risulti *minima.*

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

— ottenuto, ad esempio, imponendo le condizioni di interpolazione $p(x_j) = y_j, j = 0, \ldots, 5$ — ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*: $55\, a_1 = 107$. Si ottiene un'unica soluzione: $a_1 = \frac{107}{55}$ e quindi *un unico elemento che meglio approssima i dati*:

$$p(x) = \frac{107}{55}\, x$$

rappresentato, insieme ai dati, in Figura 1.

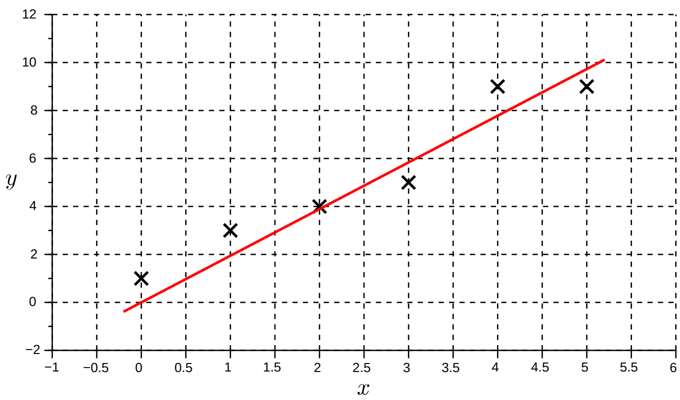

Figura 1: In rosso: la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.