UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 febbraio 2016

Problema 1

Sia $M = F(2, 53)$. Dimostrare che: *se* $\mathrm{rd}(x) > 2$ *allora* $x > 2$.

Problema 2

Applicando la procedura EGPP ad $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ si ottiene:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Calcolare $\det A$, A^{-1} e $c_\infty(A)$.

Problema 3

Sia $f(x) = x - e^{-x} - 2$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un valore x_0 a partire dal quale la successione generata da tale metodo, operando in $\mathbb{R}$, risulta convergente allo zero.

(c) Sia x_k la successione generata dal metodo di Newton a partire da $x_0 = 1$, operando in $\mathbb{R}$. Determinare

$$\lim_{k\to\infty} x_k$$

Soluzione

Problema 1

Si ha: $\mathrm{rd}(x) > 2 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{2+\sigma(2)}{2}$. Inoltre: $\sigma(2) > 2 \;\Rightarrow\; \frac{2+\sigma(2)}{2} > 2$. Dunque: $x > \frac{2+\sigma(2)}{2} > 2$.

Problema 2

Dette, nell'ordine S, D e P le tre matrici ottenute da EGPP, si constata che $P = I$ e quindi $A = SD$. Ne segue subito che $\det A = \det S \det D = -2$ e quindi A è invertibile.

L'inversa vale $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$ ed utilizzando, ad esempio, le procedure SA ed SI si ottiene:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Allora:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il numero di condizionamento di A in norma infinito vale $c_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty$. Dopo aver calcolato:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene $\| A \|_\infty = 5$, $\| A^{-1} \|_\infty = 2$ e quindi $c_\infty(A) = 10$.

Problema 3

(a) Poiché la derivata prima $f'(x) = 1 + e^{-x}$ è *non zero* per ogni x reale, la funzione f ha *al più uno zero*. Inoltre:

$$f(2) = -e^{-2} < 0 \quad \text{e} \quad f(3) = 1 - \frac{1}{e^3} > 0$$

e quindi f *ha uno zero*: $\alpha \in [2, 3]$.

(b) La funzione f ha derivata seconda continua e la derivata prima è *non zero* per ogni x reale, quindi $f'(\alpha) \neq 0$ ed il metodo di Newton è utilizzabile per approssimare lo zero. Inoltre $f''(x) = -e^{-x} \neq 0$ per ogni x reale e quindi è utilizzabile anche il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton e si ha: *con $x_0 = 2$ la successione risulta convergente ad α* e monotona crescente.

(c) Poichè l'intervallo $[1, 3]$ verifica le ipotesi che rendono utilizzabile il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton e $f(1)\, f''(1) > 0$ si deduce che *la successione è convergente ad α*:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$