UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 14 gennaio 2016

Problema 1

Siano rd_2 la funzione arrotondamento in $F(2,5)$, rd_{10} la funzione arrotondamento in $F(10,2)$ e $x \in \mathbb{R}$ tale che: $\mathrm{rd}_2(x) = \mathrm{rd}_{10}(x) = 2$. Determinare il più piccolo intervallo che certamente contiene x.

Problema 2

Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la *norma infinito* e siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $b, \delta b \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\| b \| = 10 \quad , \quad \epsilon_b = \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} = \frac{1}{10}$$

(A) Disegnare in un piano cartesiano l'insieme di tutti i possibili vettori δb.

Dette x^* la soluzione del sistema $Ax = b$ e $x^* + \delta x$ la soluzione del sistema $Ax = b + \delta b$:

(B) determinare il massimo valore possibile di:

$$\epsilon_d = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|}$$

Problema 3

Determinare le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Problema 1

Siano π_2 e σ_2, rispettivamente, le funzioni predecessore e successore in $F(2,5)$ e π_{10} e σ_{10}, rispettivamente, le funzioni predecessore e successore in $F(10,2)$. Si ha:

$$\mathrm{rd}_2(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{\pi_2(2)+2}{2}\,;\,\tfrac{\sigma_2(2)+2}{2}\right] = I_2$$

e

$$\mathrm{rd}_{10}(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{\pi_{10}(2)+2}{2}\,;\,\tfrac{\sigma_{10}(2)+2}{2}\right] = I_{10}$$

dunque *il più piccolo intervallo che certamente contiene x è* $I_2 \cap I_{10}$. Si ottiene:

$$I_2 = \left[2 - \tfrac{1}{32}\,;\,2 + \tfrac{1}{16}\right] \quad \text{e} \quad I_{10} = \left[2 - \tfrac{5}{100}\,;\,2 + \tfrac{5}{100}\right]$$

Considerato che $\frac{1}{32} < \frac{5}{100} < \frac{1}{16}$ si ha (aiutarsi con un disegno):

$$I_2 \cap I_{10} = \left[2 - \tfrac{1}{32}\,;\,2 + \tfrac{5}{100}\right] = [1.96875\,;\,2.05]$$

Problema 2

(A) Essendo $\|\, b \,\| = 10$ e $\epsilon_b = \frac{1}{10}$, i possibili vettori δb sono quelli *sul bordo* dell'intorno di centro 0 e raggio 1 rappresentato in Figura 1.

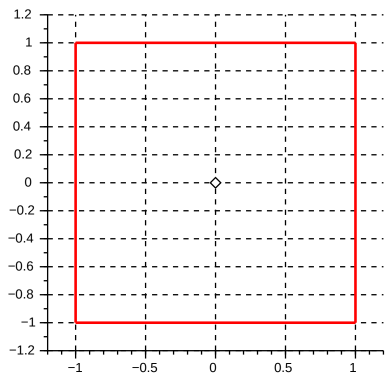

Figura 1: In rosso: il bordo dell'intorno di centro 0 e raggio 1. La losanga è il centro 0.

(B) Per il *Teorema di condizionamento*: assegnata una matrice A (1) per ogni b e δb si ha:

$$\epsilon_d \leqslant c(A)\epsilon_b$$

e (2) esistono b e δb tali che:

$$\epsilon_d = c(A)\epsilon_b$$

Nel caso in esame, dopo aver determinato:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene $c(A) = 2 \cdot 2 = 4$ e quindi *il massimo valore di* ϵ_d *è* $\frac{2}{5}$.
Nota. Il massimo valore di ϵ_d si ottiene, ad esempio, per:

$$\delta b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Infatti:

$$\max_{\|\,\delta b\,\|=1\,,\,\|\,b\,\|=10} \epsilon_d = \frac{\max_{\|\,\delta b\,\|=1} \|\,\delta x\,\|}{\min_{\|\,b\,\|=10} \|\,x^*\,\|}$$

Inoltre: (1) essendo $A\,\delta x = \delta b$ si ha: per ogni δb tale che $\|\,\delta b\,\| = 1$ vale: $\|\,\delta x\,\| = \|\,A^{-1}\delta b\,\| \leqslant \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta b\,\| = 2$ e per il δb riportato sopra vale: $\|\,A^{-1}\delta b\,\| = \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta b\,\|$ ovvero $\|\,\delta x\,\| = \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta b\,\| = 2$; (2) essendo $Ax^* = b$ si ha: per ogni b tale che $\|\,b\,\| = 10$ vale: $\|\,b\,\| = \|\,Ax^*\,\| \leqslant \|\,A\,\|\,\|\,x^*\,\|$ e quindi $\|\,x^*\,\| \geqslant \frac{\|\,b\,\|}{\|\,A\,\|} = 5$ e per $x^* = A^{-1}b$, con b quello riportato sopra, vale: $\|\,Ax^*\,\| = \|\,A\,\|\,\|\,x^*\,\|$ ovvero $\|\,x^*\,\| = \frac{\|\,b\,\|}{\|\,A\,\|} = 5$.

Problema 3

Le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema sono le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione (come atteso):

$$x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$