UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 5 gennaio 2015

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Dopo aver verificato che $7 \in M$ e $12 \in M$, determinare il massimo dell'insieme:

$$\{\, 1 \oslash \theta \,,\, \theta \in [7,12] \cap M \,\}$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per calcolare $\det A$.

Problema 3

Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $h(x) = e^{-x^2}$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascun α punto unito di h, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, eventualmente, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $7 = 2^3 \cdot 0.1110 \in M$ e $12 = 2^4 \cdot 0.1010 \in M$.

Per definizione, $1 \oslash \theta = \mathrm{rd}(1/\theta)$. Per le proprietà di monotonia delle funzioni $1/\theta$ e rd, *l'elemento richiesto è*: $1 \oslash 7$. Si ha: $1/7 = 2^{-2} \cdot 0.\overline{100}$ e quindi i due elementi di M ad esso adiacenti sono: $2^{-2} \cdot 0.1001$ e $2^{-2} \cdot 0.1010$. Il più vicino ad $1/7$ risulta il primo dei due e quindi: $1 \oslash 7 = \mathrm{rd}(1/7) = 2^{-2} \cdot 0.1001$.

Problema 2

Si constata facilmente che per $k = 1, 2, 3$ si ha $\det A[k] \neq 0$, dunque la procedura `EG` è definita in A che quindi ammette un'unica fattorizzazione LR che risulta:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Infine, $\det A = \det S \det D = 4$.

Problema 3

(a) Si consideri la funzione $F(x) = x - h(x)$. I punti uniti di h sono tutti e soli gli *zeri* di F. Inoltre:

(1) per ogni $x \leqslant 0$ si ha: $F(x) < 0$, dunque F *non ha* zeri per $x \leqslant 0$;

(2) F è derivabile, $F'(x) = 1 + 2x\, e^{-x^2}$ e per ogni $x > 0$ si ha $F'(x) > 0$, dunque F ha, nell'intervallo $(0, +\infty)$, *al più uno zero*;

(3) $F(0) < 0$, $F(1) > 0$.

Se ne deduce che h ha *un solo punto unito* contenuto nell'intervallo $[0, 1]$.

(b) Si ha: $h'(x) = -2x\, e^{-x^2}$ e si constata (ad esempio studiando h'') che per ogni $x \in [0, 1]$ risulta $|h'(x)| < 1$. Quindi il metodo iterativo definito da h *è utilizzabile* per approssimare il punto unito. Infine, si constata (anche graficamente) che per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $h(x) \in [0, 1]$ dunque *per ogni* $x_0 \in [0, 1]$ la successione generata dal metodo iterativo definito da h risulta convergente al punto unito.

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 gennaio 2015

Problema 1

Siano $M = F(2, 3)$ e $x = \frac{1}{6}$. Determinare $\mathrm{rd}(x)$ e verificare che l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$ non supera, in valore assoluto, la precisione di macchina.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x) = e^{2x} - 1 - \frac{x}{2}$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, eventualmente, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Poiché $\frac{1}{8} < \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{4}$, l'esponente di x in base due è -2 e la frazione $\frac{2}{3}$.

Dette $c_1, c_2, \ldots$ le cifre della scrittura posizionale in base due della frazione, si ha: $\frac{2}{3} = 0.c_1c_2\cdots$ e quindi $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = c_1.c_2c_3\cdots$, dunque: $c_1 = 1$ e $\frac{1}{3} = 0.c_2c_3\cdots$ Procedendo analogamente: $\frac{2}{3} = c_2.c_3c_4\cdots$ Confrontando questa scrittura di $\frac{2}{3}$ con quella iniziale si ottiene il valore di tutte le cifre:

$$\tfrac{2}{3} = 0.\overline{10}$$

da cui:

$$\tfrac{1}{6} = 2^{-2} \cdot 0.\overline{10}$$

e si constata che x *non è* un numero di macchina. Gli elementi di M adiacenti ad x sono: $\xi_s = 2^{-2} \cdot 0.101$ e $\xi_d = \sigma(\xi_s) = 2^{-2} \cdot 0.110$. Il punto medio tra i due, $2^{-2} \cdot 0.1011$, risulta *maggiore* di x e quindi:

$$\mathrm{rd}(x) = \xi_s = 2^{-2} \cdot 0.101$$

Essendo $\mathrm{rd}(x) = \frac{5}{32}$, l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$ è $-\frac{1}{16}$. Risulta infine:

$$|\text{errore relativo}| = \tfrac{1}{16} < \tfrac{1}{2}\, 2^{1-3} = \tfrac{1}{8} = \text{precisione di macchina}$$

Problema 2

Per determinare una fattorizzazione QR di A si procede cercando inizialmente due matrici $\Omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ a *colonne ortogonali* e $\Theta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *triangolare superiore con* $\theta_{11} = \theta_{22} = 1$, tali che $\Omega\,\Theta = A$. *Se matrici siffatte esistono*, quest'ultima uguaglianza, *letta per colonne*, richiede che, dette a_1, a_2 le colonne di A:

$$\omega_1 = a_1 \quad , \quad \omega_1\theta_{12} + \omega_2 = a_2$$

La colonna ω_1 è determinata dalla prima uguaglianza. Dalla seconda, moltiplicando scalarmente per ω_1 e ricordando che le colonne ω_1 e ω_2 sono ortogonali, si ottiene $\theta_{12} = \frac{1}{2}$ e poi $\omega_2 = a_2 - \omega_1\theta_{12}$. Dalle due matrici trovate si ricava una coppia U, T fattorizzazione QR di A introducendo la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|)$ e ponendo:

$$U = \Omega\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad , \quad T = \Delta\Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati (l'unicità si deduce dall'essere le colonne di A *linearmente indipendenti*) si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$$

che, utilizzando la fattorizzazione QR di A, si riduce alla forma equivalente:

$$Tx = U^{\mathsf{T}}b$$

La soluzione di quest'ultimo sistema (e quindi la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati) è: $x = 0$.

Problema 3

(a) La funzione $f(x)$ è derivabile due volte e risulta: $f'(x) = 2\,e^{2x} - \frac{1}{2}$ e $f''(x) = 4\,e^{2x}$. Quest'ultima funzione assume valori *sempre diversi da zero*, quindi f ha *al più due zeri*. Si constata che: $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) = 0$ e $f(1) > 0$. Allora: *f ha due zeri*: $\alpha_1 \in [-2, -1]$ e $\alpha_2 = 0 \in [-1, 1]$.

(b) Si constata che $f'(\alpha_1) \neq 0$ (infatti f' è crescente – perchè f'' è sempre positiva –, $f'(-1) < 0$ e $\alpha_1 < -1$) e $f'(\alpha_2) = f'(0) > 0$. Il metodo di Newton *è quindi utilizzabile per approssimare entrambi* gli zeri.

Essendo $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [-2, -1]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -2$*. Infine, essendo $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 1$*.

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 4 febbraio 2015

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare il più piccolo numero intero positivo che non appartiene ad M.

Problema 2

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare l'insieme $F = \{ \alpha \in \mathbb{R} \text{ tali che } \texttt{EG} \text{ è definita in } A(\alpha) \}$ e poi, per ogni $\alpha \notin F$, discutere l'esistenza di fattorizzazioni LR di $A(\alpha)$.

Problema 3

Per determinare gli elementi dello spazio $S = \langle 1, 2^x \rangle$ che meglio approssimano i dati

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$$

nel senso dei minimi quadrati si cercano le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare i dati da approssimare e decidere quanti sono gli elementi di S che meglio li approssimano nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

L'insieme M contiene certamente tutti i numeri interi positivi che, in base due, possono scriversi con al più tre cifre: $1, \ldots, 7$. Poiché la scrittura di 8 in base due è 1000, si ha: $8 = 2^4 \cdot 0.100$ e quindi: $8 \in M$. Invece, la scrittura di 9 in base due è 1001 e perciò $9 = 2^4 \cdot 0.1001 \notin M$. Dunque *il più piccolo numero intero positivo che non appartiene ad M è 9.*

Problema 2

Si ricordi che la procedura `EG` è definita in $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se e solo se $\det A[k] \neq 0$ per $k = 1, \ldots, n-1$.

Nel caso in esame si ha:

$$\det A[1] = 1 \quad , \quad \det A[2] = 1 \quad , \quad \det A[3] = \alpha$$

dunque: $F = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.

Per $\alpha = 0$ la matrice $A(0)$ risulta invertibile e quindi, come noto, *non esistono fattorizzazioni LR di $A(0)$.*

Problema 3

Il sistema riportato è quello che si ottiene imponendo che l'elemento $a_0 + a_1\, 2^x \in S$ interpoli i dati. Se ne deduce che $k = 4$, che gli elementi della seconda colonna della matrice del sistema sono i valori della funzione 2^x in $-1, 0, 1, 2, 2$ e che gli elementi della colonna termine noto sono i valori da interpolare. I dati sono quindi:

$$(-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (2, 1) \quad , \quad (2, 2)$$

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 24 febbraio 2015

Problema 1

Sia $M = F(2,6)$. Indicare quale ampiezza può avere un intervallo ad estremi elementi consecutivi di M contenuti in $[10,33]$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per calcolare A^{-1}.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x} - 2 + x$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un valore x_0 a partire dal quale la successione generata da tale metodo, operando in $\mathbb{R}$, risulta convergente allo zero.

Soluzione

Problema 1

Si ricordi che la distanza tra un elemento di $F(2,6)$ di esponente b ed il suo successore è: 2^{b-6}. Poichè $10 = 2^4 \cdot 0.101000$ e $33 = 2^6 \cdot 0.100001$, *i possibili valori dell'ampiezza di un intervallo ad estremi elementi consecutivi di* $F(2,6)$ *sono:* $2^{4-6} = \frac{1}{4}$, $2^{5-6} = \frac{1}{2}$ e $2^{6-6} = 1$.

Problema 2

Usando la procedura `EG` (definita in A, essendo $\det A[1] = 1$, $\det A[2] = 2$ e $\det A[3] = 2$) oppure il procedimento di Doolittle, si ottiene la fattorizzazione (unica):

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A risulta invertibile poiché lo è D, dunque $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Indicando con $e_1, \ldots, e_4$ le colonne della base canonica di $\mathbb{R}^4$, l'inversa dei fattori S e D si calcola facilmente risolvendo, rispettivemente, i sistemi $Sy_k = e_k$ e $Dz_k = e_k$, $k = 1, \ldots, 4$, e ponendo:

$$S^{-1} = (y_1, \ldots, y_4) \qquad , \qquad D^{-1} = (z_1, \ldots, z_4)$$

Si ottiene:

$$A^{-1} = D^{-1}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(a) La funzione $f(x)$ è derivabile due volte e risulta: $f'(x) = 1 - e^{-x}$ e $f''(x) = e^{-x}$. Quest'ultima funzione assume valori *sempre diversi da zero*, quindi f ha *al più due zeri*. Si constata che: $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Allora: *f ha due zeri*: $\alpha_1 \in [-2, -1]$ e $\alpha_2 \in [1, 2]$.

(b) Si constata che $f'(\alpha_1) \neq 0$ (infatti $f'(x) < 0$ per $x < 0$) e $f'(\alpha_2) > 0$ (infatti $f'(x) > 0$ per $x > 0$). *Il metodo di Newton è* quindi *utilizzabile per approssimare entrambi gli zeri.*

Infine, essendo $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [-2, -1]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad* α_1 *a partire da* $x_0 = -2$ e, essendo $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [1, 2]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad* α_2 *a partire da* $x_0 = 2$.

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 giugno 2015

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Indicare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che

$$\xi \oplus 2 = 2$$

Problema 2

Determinare il polinomio $p(t)$ di grado *al più uno* che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati ottenuti campionando la funzione $f(t) = 2^{-t}$ agli istanti $t_0 = -2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x} + e^{x-1} - 4$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un valore x_0 a partire dal quale la successione generata da tale metodo, operando in $\mathbb{R}$, risulta convergente allo zero.

(c) Sia x_k la successione generata dal metodo di Newton a partire da $x_0 = 1$, operando in $\mathbb{R}$. Determinare

$$\lim_{k\to\infty} x_k$$

Soluzione

Problema 1

Per definizione, si cercano gli elementi $\xi \in M$ tali che: $\mathrm{rd}(\xi + 2) = 2$, ovvero gli elementi dell'insieme:

$$\{\xi \in \mathbb{R} \text{ tali che: } \mathrm{rd}(\xi + 2) = 2\} \cap M$$

Posto $x = \xi + 2$ si ha: $\mathrm{rd}(\xi + 2) = 2$ se e solo se $\mathrm{rd}(x) = 2$. Detti m_1 il punto medio del segmento di estremi $\pi(2)$, 2 e m_2 il punto medio del segmento di estremi 2, $\sigma(2)$ si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 2 \quad \text{se e solo se} \quad x \in [m_1, m_2]$$

Dunque:

$$\{\xi \in \mathbb{R} \text{ tali che: } \mathrm{rd}(\xi + 2) = 2\} = [m_1 - 2, m_2 - 2]$$

Nel caso in esame risulta:

$$m_1 = 2^1 \cdot 0.11111 \quad \text{e} \quad m_2 = 2^2 \cdot 0.10001$$

e quindi:

$$\{\xi \in M \text{ tali che: } \xi \oplus 2 = 2\} = [-2^{-4}, 2^{-3}] \cap M$$

Problema 2

I dati da approssimare sono: $(-2, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{4})$, e si cercano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $p(t) = a_0 + a_1 t$, la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(-2) - 4)^2 + (p(-1) - 2)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - \tfrac{1}{2})^2 + (p(2) - \tfrac{1}{4})^2$$

risulti *minima*.

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

— ottenuto imponendo le condizioni di interpolazione $p(t_j) = f(t_j), j = 0, \ldots, 4$ — ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{4} \\ -9 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione: $a_0 = \frac{31}{20}, a_1 = -\frac{9}{10}$ e quindi un unico polinomio che meglio approssima i dati:

$$p(t) = \frac{31}{20} - \frac{9}{10}\, t$$

Problema 3

(a) Poiché la derivata seconda $f''(x) = e^{-x} + e^{x-1}$ è *non zero* per ogni x reale, la funzione f ha *al più due zeri*. Inoltre:

$$f(0) = e^{-1} - 3 < 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e quindi *f ha due zeri*: α_1 e α_2. Si ottiene poi, ad esempio: $\alpha_1 \in [-2, 0]$ e $\alpha_2 \in [1, 3]$.

(b) La derivata prima $f'(x) = -e^{-x} + e^{x-1}$ si annulla solo per $x = \frac{1}{2}$ dunque in ciascuno degli intervalli suddetti si ha $f' \neq 0$ e $f'' \neq 0$. Dunque è utilizzabile il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton e si ha: con $x_0 = -2$ la successione risulta convergente ad α_1 e monotona crescente; con $x_0 = 3$ la successione risulta convergente ad α_2 e monotona decrescente.

(c) Poichè $f(1) < 0$ e $f'(1) > 0$, si ha $x_1 > \alpha_2$. Si ha quindi: $\alpha_2 \in [1, x_1]$ e su questo intervallo si ha $f' \neq 0$ e $f'' \neq 0$. Dal criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton si deduce che *la successione è convergente ad α_2*.

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'8 luglio 2015

Problema 1

Siano $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(2) = 3$ e $C(x; \varepsilon) = x\,\varepsilon$ la *funzione di condizionamento del calcolo di* $F(x)$. Determinare il valore $F(2.2)$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per decidere se A, simmetrica, sia anche *definita positiva*.

Problema 3

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \operatorname{sen} 2t + \cos t$ ed N un intero positivo. Si consideri la funzione ottenuta campionando f agli istanti $t_j = j\frac{2\pi}{N}, j = 0, \ldots, N$, ed eseguendo la ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti su $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$.

Determinare un valore di N *sufficiente* a garantire *errore di ricostruzione* inferiore a 10^{-2}.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) \neq 0$ si ha:

$$C(x;\varepsilon) = \frac{F((1+\varepsilon)x) - F(x)}{F(x)}$$

da cui:

$$F((1+\varepsilon)x) = (1 + C(x;\varepsilon))\, F(x)$$

Posto $x = 2$ si ha $2.2 = (1+0.1)\,2$ e quindi, scelto $\varepsilon = 0.1$:

$$F(2.2) = F((1+0.1)\,2) = (1 + C(2;0.1))\, F(2) = 3\,(1+0.2) = 3.6$$

Problema 2

Utilizzando, ad esempio, la procedura `EG` si ottiene la fattorizzazione LR di A:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché $d_{33} < 0$, la matrice A *non* è definita positiva.

Problema 3

Dette c la *funzione di campionamento* agli istanti t_j e r la *funzione di ricostruzione* con funzioni lineari a tratti su $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$, si ha:

$$e(f) = \max_{t \in [0, 2\,\pi]} |f(t) - r(c(f))(t)| \leqslant \frac{M_2}{8}\, h^2$$

dove $h = max\{t_{j+1} - t_j, j = 0, \ldots, N-1\}$ e M_2 è un numero reale tale che

$$\max_{t \in [0, 2\,\pi]} |f''(t)| \leqslant M_2$$

Nel caso in esame si ha:

$$h = \frac{2\pi}{N} \quad , \quad f''(t) = -4\,\operatorname{sen} 2t - \cos t$$

e quindi, scelto $M_2 = 5$:

$$e(f) \leqslant \frac{5}{8} \frac{4\,\pi^2}{N^2}$$

Dunque, qualsiasi valore di N tale che:

$$\frac{5}{8} \frac{4\,\pi^2}{N^2} < 10^{-2}$$

ovvero tale che:

$$N > \sqrt{\frac{5}{8}}\, 20\,\pi$$

è sufficiente a garantire $e(f) < 10^{-2}$. Il più piccolo valore consentito risulta: $N = 50$.

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 luglio 2015

Problema 1

Determinare il più piccolo numero intero positivo che *non* appartiene all'insieme $F(2,12)$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Si considerino i dati

$$(-1, y_0) \quad , \quad (0, y_1) \quad , \quad (1, y_2)$$

con $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Determinare la forma di Lagrange del polinomio interpolante.

Soluzione

Problema 1

Tutti gli interi positivi che si rappresentano, in base due, su *al più* dodici cifre sono in $F(2,12)$, infatti:

$$c_1 \cdots c_{12} = 2^{12} \cdot 0.c_1 \cdots c_{12}$$

Dunque:

$$\{1, 2, \ldots, 2^{12} - 1\} \subset F(2,12)$$

Inoltre: $2^{12} = 2^{13} \cdot 0.1 \in F(2,12)$, *ma*:

$$2^{12} + 1 = 2^{13} \cdot \underbrace{0.10 \cdots 01}_{13 \text{ cifre}} \notin F(2,12)$$

L'elemento cercato è quindi $2^{12} + 1$.

Problema 2

Si constata che la matrice A ha *colonne ortogonali* e quindi una fattorizzazione QR di A si ottiene normalizzando le colonne:

$$U = \tfrac{1}{2}A \quad , \quad T = 2\,I$$

Poiché le colonne di A sono linearmente indipendenti, il sistema $Ax = b$ ha *una sola* soluzione nel senso dei minimi quadrati, che è la soluzione del sistema delle *equazioni normali* $A^\mathsf{T} Ax = A^\mathsf{T} b$ *equivalente* al sistema $Tx = U^\mathsf{T} b$. Si ottiene il vettore:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Il polinomio interpolante, in questo caso, è l'unico polinomio di grado al più *due* che interpola i dati. Una base di Lagrange di $P_2(\mathbb{R})$ è, nel caso in esame:

$$\ell_{0,2}(x) = \frac{x(x-1)}{2} \quad , \quad \ell_{1,2}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} \quad , \quad \ell_{2,2}(x) = \frac{(x+1)x}{2}$$

Si cercano i coefficienti reali a_0, a_1 e a_2 in modo che il polinomio

$$a_0\ell_{0,2}(x) + a_1\ell_{1,2}(x) + a_2\ell_{2,2}(x)$$

interpoli i dati. Il sistema di equazioni che si ottiene è:

$$I \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Dunque, il polinomio interpolante risulta: $y_0\ell_{0,2}(x) + y_1\ell_{1,2}(x) + y_2\ell_{2,2}(x)$.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 10 settembre 2015

Problema 1

Sia $M = F(2, 53)$. Determinare tutti gli elementi della successione:

$$\xi_k = 1 \oplus 2^{-k} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Problema 2

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Utilizzare la procedura `EG` per determinare tutti i valori di α per i quali $A(\alpha)$ risulta definita positiva.

Problema 3

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2 + \ln x - x^2$.

(1) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(2) Decidere se il metodo iterativo definito da

$$h(x) = e^{x^2-2}$$

sia utilizzabile per approssimare gli zeri di f.

Soluzione

Problema 1

Si osserva che sia 1 che 2^{-k}, k numero intero, sono elementi di M, dunque la domanda ha senso. Inoltre:

$$1 + 2^{-k} = 2^0 + 2^{-k} = 2^1(2^{-1} + 2^{-k-1}) = 2^1 \cdot 0.1\underbrace{0\cdots0}_{k-1}1$$

Allora: *per* $k \leqslant 52$ *si ha* $1 + 2^{-k} \in M$ *e quindi* $1 \oplus 2^{-k} = 1 + 2^{-k}$*; per* $k \geqslant 53$ *si ha invece* $1 \oplus 2^{-k} = 1$.

Problema 2

La procedura EG termina correttamente, quando applicata ad $A(\alpha)$, se e solo se $\alpha \neq 0$ ed in tal caso fornisce la fattorizzazione LR della matrice. Gli elementi sulla diagonale del fattore destro $D(\alpha)$ di tale fattorizzazione sono:

$$d_{11} = \alpha^2 \quad , \quad d_{22} = 1 - \frac{1}{\alpha^2} \quad , \quad d_{33} = \alpha$$

Allora: per $\alpha = 0$ la procedura EG non termina correttamente e quindi $A(0)$ non è definita positiva; per $\alpha \neq 0$ gli elementi d_{11}, d_{22} e d_{33} sono positivi se e solo se α verifica le tre condizioni: $\alpha^2 > 0$, $1 - \frac{1}{\alpha^2} > 0$ e $\alpha > 0$, ovvero se e solo se $\alpha > 1$.

In conclusione, $A(\alpha)$ *è definita positiva se e solo se* $\alpha > 1$.

Problema 3

(1) La funzione $f(x)$, definita per $x > 0$, ha derivata seconda ($f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$) continua e sempre non nulla, quindi f ha *al più due zeri*. Si constata che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $f(\sqrt{2}) > 0$ e $f(2) < 0$. Quindi: *f ha due zeri* e:

$$\alpha_1 \in [0, \sqrt{2}] \quad , \quad \alpha_2 \in [\sqrt{2}, 2]$$

(2) Si verifica che $h(x) = x$ se e solo se $x^2 - 2 = \ln x$ ovvero se e solo se $f(x) = 0$, dunque *l'insieme degli zeri di f coincide con l'insieme dei punti uniti di h.* Inoltre, h ha derivata prima continua:

$$h'(x) = 2x\, e^{x^2-2}$$

e se α è zero di f allora ($\alpha^2 - 2 = \ln\alpha$ e quindi) $h'(\alpha) = 2\alpha^2$. Poiché risulta che $2\alpha_1^2 < 1$ (infatti $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$) e $2\alpha_2^2 > 1$, *il metodo definito da h è utilizzabile per approssimare α_1 ma non α_2.*

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 novembre 2015

Problema 1

Siano $x = \frac{7}{3}$ e ξ l'arrotondato di x in $F(2,5)$. Determinare ξ e verificare se l'errore relativo commesso approssimando x con ξ è minore della precisione di macchina in $F(2,5)$.

Problema 2

Determinare l'elemento di $\langle t, 2^t \rangle$ che meglio approssima i dati:

t_k	0	0	1
y_k	-1	1	0

nel senso dei minimi quadrati.

Problema 3

Sia $h(x) = e^{-x} + 4$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da $h(x)$ sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

Poiché $2 < \frac{7}{3} \leqslant 4$, l'esponente di x in base due è 2 e la frazione $\frac{7}{12}$.

Dette $c_1, c_2, \ldots$ le cifre della scrittura posizionale in base due della frazione, si ha: $\frac{7}{12} = 0.c_1c_2\cdots$ e quindi $\frac{14}{12} = 1 + \frac{1}{6} = c_1.c_2c_3\cdots$, dunque: $c_1 = 1$ e $\frac{1}{6} = 0.c_2c_3\cdots$ Procedendo analogamente: $c_2 = 0$ e $\frac{1}{3} = 0.c_3c_4\cdots$, $c_3 = 0$ e $\frac{2}{3} = 0.c_4c_5\cdots$, $c_4 = 1$ e $\frac{1}{3} = 0.c_5c_6\cdots$ Confrontando questa scrittura di $\frac{1}{3}$ con quella trovata al secondo passaggio si ottiene il valore di tutte le cifre:

$$\frac{7}{12} = 0.100\overline{101}$$

da cui:

$$\frac{7}{3} = 2^2 \cdot 0.100\overline{101}$$

e si constata che x *non è* un numero di macchina. Gli elementi di $F(2,5)$ adiacenti ad x sono: $\xi_s = 2^2 \cdot 0.10010$ e $\xi_d = \sigma(\xi_s) = 2^2 \cdot 0.10011$. Il punto medio tra i due, $2^2 \cdot 0.100101$, risulta *minore* di x e quindi:

$$\mathrm{rd}(x) = \xi_d = 2^2 \cdot 0.10011$$

Essendo $\mathrm{rd}(x) = \frac{19}{8}$, l'errore relativo commesso approssimando x con ξ è $\frac{1}{56}$. Risulta infine:

$$|\text{errore relativo}| = \frac{1}{56} < 2^{-5} = \frac{1}{32} = \text{precisione di macchina}$$

Problema 2

Si cercano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $g(t) = a_0 t + a_1 2^t$, la quantità

$$F(a_0, a_1) = (g(0) + 1)^2 + (g(0) - 1)^2 + (g(1) - 0)^2$$

risulti *minima.*

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

— ottenuto imponendo le condizioni di interpolazione $g(t_j) = y_j, j = 0, 1, 2$ — ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione: $a_0 = 0, a_1 = 0$ e quindi l'elemento che meglio approssima i dati è *la funzione nulla.*

Problema 3

(a) Si consideri la funzione $F(x) = h(x) - x$. I punti uniti di h sono tutti e soli gli *zeri* di F. Inoltre:

(1) F è derivabile, $F'(x) = -e^{-x} - 1$ e per ogni x si ha $F'(x) < 0$, dunque F ha *al più uno zero*;

(2) $F(4) > 0$, $F(6) < 0$.

Se ne deduce che h ha *un solo punto unito* contenuto nell'intervallo $[4, 6]$.

(b) Si ha: $h'(x) = -e^{-x}$ e si constata che per ogni $x \in [4, 6]$ risulta $|h'(x)| < 1$. Quindi il metodo iterativo definito da h *è utilizzabile* per approssimare il punto unito. Infine, si constata che, essendo $F(5) < 0$, il punto unito di h è più vicino a 4 che a 6, dunque la successione generata dal metodo iterativo definito da h a partire da $x_0 = 4$ risulta convergente al punto unito.