UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 luglio 2015

Problema 1

Determinare il più piccolo numero intero positivo che *non* appartiene all'insieme $F(2, 12)$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Si considerino i dati

$$(-1, y_0) \quad , \quad (0, y_1) \quad , \quad (1, y_2)$$

con $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Determinare la forma di Lagrange del polinomio interpolante.

Soluzione

Problema 1

Tutti gli interi positivi che si rappresentano, in base due, su *al più* dodici cifre sono in $F(2,12)$, infatti:

$$c_1 \cdots c_{12} = 2^{12} \cdot 0.c_1 \cdots c_{12}$$

Dunque:

$$\{1, 2, \ldots, 2^{12} - 1\} \subset F(2,12)$$

Inoltre: $2^{12} = 2^{13} \cdot 0.1 \in F(2,12)$, *ma*:

$$2^{12} + 1 = 2^{13} \cdot \underbrace{0.10\cdots01}_{13 \text{ cifre}} \notin F(2,12)$$

L'elemento cercato è quindi $2^{12} + 1$.

Problema 2

Si constata che la matrice A ha *colonne ortogonali* e quindi una fattorizzazione QR di A si ottiene normalizzando le colonne:

$$U = \tfrac{1}{2}A \quad , \quad T = 2\,I$$

Poiché le colonne di A sono linearmente indipendenti, il sistema $Ax = b$ ha *una sola* soluzione nel senso dei minimi quadrati, che è la soluzione del sistema delle *equazioni normali* $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$ *equivalente* al sistema $Tx = U^{\mathsf{T}}b$. Si ottiene il vettore:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Il polinomio interpolante, in questo caso, è l'unico polinomio di grado al più *due* che interpola i dati. Una base di Lagrange di $P_2(\mathbb{R})$ è, nel caso in esame:

$$\ell_{0,2}(x) = \frac{x(x-1)}{2} \quad , \quad \ell_{1,2}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} \quad , \quad \ell_{2,2}(x) = \frac{(x+1)x}{2}$$

Si cercano i coefficienti reali a_0, a_1 e a_2 in modo che il polinomio

$$a_0\ell_{0,2}(x) + a_1\ell_{1,2}(x) + a_2\ell_{2,2}(x)$$

interpoli i dati. Il sistema di equazioni che si ottiene è:

$$I \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Dunque, il polinomio interpolante risulta: $y_0\ell_{0,2}(x) + y_1\ell_{1,2}(x) + y_2\ell_{2,2}(x)$.