UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello dell'8 luglio 2015

Problema 1

Siano $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(2) = 3$ e $C(x; \varepsilon) = x\,\varepsilon$ la *funzione di condizionamento del calcolo di* $F(x)$. Determinare il valore $F(2.2)$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per decidere se A, simmetrica, sia anche *definita positiva*.

Problema 3

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \operatorname{sen} 2t + \cos t$ ed N un intero positivo. Si consideri la funzione ottenuta campionando f agli istanti $t_j = j\frac{2\pi}{N}, j = 0, \ldots, N$, ed eseguendo la ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti su $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$.

Determinare un valore di N *sufficiente* a garantire *errore di ricostruzione* inferiore a 10^{-2}.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) \neq 0$ si ha:

$$C(x;\varepsilon) = \frac{F((1+\varepsilon)x) - F(x)}{F(x)}$$

da cui:

$$F((1+\varepsilon)x) = (1 + C(x;\varepsilon))\, F(x)$$

Posto $x = 2$ si ha $2.2 = (1+0.1)\,2$ e quindi, scelto $\varepsilon = 0.1$:

$$F(2.2) = F((1+0.1)\,2) = (1 + C(2;0.1))\, F(2) = 3\,(1+0.2) = 3.6$$

Problema 2

Utilizzando, ad esempio, la procedura `EG` si ottiene la fattorizzazione LR di A:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché $d_{33} < 0$, la matrice A *non* è definita positiva.

Problema 3

Dette c la *funzione di campionamento* agli istanti t_j e r la *funzione di ricostruzione* con funzioni lineari a tratti su $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$, si ha:

$$e(f) = \max_{t \in [0, 2\,\pi]} |f(t) - r(c(f))(t)| \leqslant \frac{M_2}{8}\, h^2$$

dove $h = max\{t_{j+1} - t_j, j = 0, \ldots, N-1\}$ e M_2 è un numero reale tale che

$$\max_{t \in [0, 2\,\pi]} |f''(t)| \leqslant M_2$$

Nel caso in esame si ha:

$$h = \frac{2\pi}{N} \quad , \quad f''(t) = -4\,\mathrm{sen}\,2t - \cos t$$

e quindi, scelto $M_2 = 5$:

$$e(f) \leqslant \frac{5}{8} \frac{4\,\pi^2}{N^2}$$

Dunque, qualsiasi valore di N tale che:

$$\frac{5}{8} \frac{4\,\pi^2}{N^2} < 10^{-2}$$

ovvero tale che:

$$N > \sqrt{\frac{5}{8}}\, 20\,\pi$$

è sufficiente a garantire $e(f) < 10^{-2}$. Il più piccolo valore consentito risulta: $N = 50$.