UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 giugno 2015

## Problema 1

Sia $M = F(2, 4)$. Indicare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che

$$\xi \oplus 2 = 2$$

## Problema 2

Determinare il polinomio $p(t)$ di grado *al più uno* che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati ottenuti campionando la funzione $f(t) = 2^{-t}$ agli istanti $t_0 = -2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

## Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x} + e^{x-1} - 4$.

(a) Determinare il numero di zeri di $f$ e separarli.

(b) Per ciascuno zero di $f$, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un valore $x_0$ a partire dal quale la successione generata da tale metodo, operando in $\mathbb{R}$, risulta convergente allo zero.

(c) Sia $x_k$ la successione generata dal metodo di Newton a partire da $x_0 = 1$, operando in $\mathbb{R}$. Determinare

$$\lim_{k\to\infty} x_k$$

## Soluzione

### Problema 1

Per definizione, si cercano gli elementi $\xi \in M$ tali che: $\mathrm{rd}(\xi + 2) = 2$, ovvero gli elementi dell'insieme:

$$\{\xi \in \mathbb{R} \text{ tali che: } \mathrm{rd}(\xi + 2) = 2\} \cap M$$

Posto $x = \xi + 2$ si ha: $\mathrm{rd}(\xi + 2) = 2$ se e solo se $\mathrm{rd}(x) = 2$. Detti $m_1$ il punto medio del segmento di estremi $\pi(2)$, 2 e $m_2$ il punto medio del segmento di estremi 2, $\sigma(2)$ si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 2 \quad \text{se e solo se} \quad x \in [m_1, m_2]$$

Dunque:

$$\{\xi \in \mathbb{R} \text{ tali che: } \mathrm{rd}(\xi + 2) = 2\} = [m_1 - 2, m_2 - 2]$$

Nel caso in esame risulta:

$$m_1 = 2^1 \cdot 0.11111 \quad \text{e} \quad m_2 = 2^2 \cdot 0.10001$$

e quindi:

$$\{\xi \in M \text{ tali che: } \xi \oplus 2 = 2\} = [-2^{-4}, 2^{-3}] \cap M$$

### Problema 2

I dati da approssimare sono: $(-2, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{4})$, e si cercano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $p(t) = a_0 + a_1 t$, la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(-2) - 4)^2 + (p(-1) - 2)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - \tfrac{1}{2})^2 + (p(2) - \tfrac{1}{4})^2$$

risulti *minima*.

I valori cercati sono le soluzioni *nel senso dei minimi quadrati* del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

— ottenuto imponendo le condizioni di interpolazione $p(t_j) = f(t_j), j = 0, \ldots, 4$ — ovvero le soluzioni del sistema delle *equazioni normali*:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{4} \\ -9 \end{bmatrix}$$

Si ottiene un'unica soluzione: $a_0 = \frac{31}{20}, a_1 = -\frac{9}{10}$ e quindi un unico polinomio che meglio approssima i dati:

$$p(t) = \frac{31}{20} - \frac{9}{10}\, t$$

Problema 3

(a) Poiché la derivata seconda $f''(x) = e^{-x} + e^{x-1}$ è *non zero* per ogni $x$ reale, la funzione $f$ ha *al più due zeri*. Inoltre:

$$f(0) = e^{-1} - 3 < 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e quindi *$f$ ha due zeri*: $\alpha_1$ e $\alpha_2$. Si ottiene poi, ad esempio: $\alpha_1 \in [-2, 0]$ e $\alpha_2 \in [1, 3]$.

(b) La derivata prima $f'(x) = -e^{-x} + e^{x-1}$ si annulla solo per $x = \frac{1}{2}$ dunque in ciascuno degli intervalli suddetti si ha $f' \neq 0$ e $f'' \neq 0$. Dunque è utilizzabile il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton e si ha: con $x_0 = -2$ la successione risulta convergente ad $\alpha_1$ e monotona crescente; con $x_0 = 3$ la successione risulta convergente ad $\alpha_2$ e monotona decrescente.

(c) Poichè $f(1) < 0$ e $f'(1) > 0$, si ha $x_1 > \alpha_2$. Si ha quindi: $\alpha_2 \in [1, x_1]$ e su questo intervallo si ha $f' \neq 0$ e $f'' \neq 0$. Dal criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton si deduce che *la successione è convergente ad $\alpha_2$*.