Università di Pisa
Dipartimento di matematica

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 24 febbraio 2015

Problema 1

Sia $M = F(2,6)$. Indicare quale ampiezza può avere un intervallo ad estremi elementi consecutivi di M contenuti in $[10,33]$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per calcolare A^{-1}.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x} - 2 + x$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un valore x_0 a partire dal quale la successione generata da tale metodo, operando in $\mathbb{R}$, risulta convergente allo zero.

Soluzione

Problema 1

Si ricordi che la distanza tra un elemento di $F(2,6)$ di esponente b ed il suo successore è: 2^{b-6}. Poichè $10 = 2^4 \cdot 0.101000$ e $33 = 2^6 \cdot 0.100001$, *i possibili valori dell'ampiezza di un intervallo ad estremi elementi consecutivi di* $F(2,6)$ *sono:* $2^{4-6} = \frac{1}{4}$, $2^{5-6} = \frac{1}{2}$ e $2^{6-6} = 1$.

Problema 2

Usando la procedura `EG` (definita in A, essendo $\det A[1] = 1$, $\det A[2] = 2$ e $\det A[3] = 2$) oppure il procedimento di Doolittle, si ottiene la fattorizzazione (unica):

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A risulta invertibile poiché lo è D, dunque $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Indicando con $e_1, \ldots, e_4$ le colonne della base canonica di $\mathbb{R}^4$, l'inversa dei fattori S e D si calcola facilmente risolvendo, rispettivamente, i sistemi $Sy_k = e_k$ e $Dz_k = e_k$, $k = 1, \ldots, 4$, e ponendo:

$$S^{-1} = (y_1, \ldots, y_4) \qquad , \qquad D^{-1} = (z_1, \ldots, z_4)$$

Si ottiene:

$$A^{-1} = D^{-1}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(a) La funzione $f(x)$ è derivabile due volte e risulta: $f'(x) = 1 - e^{-x}$ e $f''(x) = e^{-x}$. Quest'ultima funzione assume valori *sempre diversi da zero*, quindi f ha *al più due zeri*. Si constata che: $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Allora: *f ha due zeri*: $\alpha_1 \in [-2,-1]$ e $\alpha_2 \in [1,2]$.

(b) Si constata che $f'(\alpha_1) \neq 0$ (infatti $f'(x) < 0$ per $x < 0$) e $f'(\alpha_2) > 0$ (infatti $f'(x) > 0$ per $x > 0$). *Il metodo di Newton è* quindi *utilizzabile per approssimare entrambi gli zeri.*

Infine, essendo $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [-2,-1]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -2$* e, essendo $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [1,2]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 2$.*