UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 4 febbraio 2015

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare il più piccolo numero intero positivo che non appartiene ad M.

Problema 2

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare l'insieme $F = \{\ \alpha \in \mathbb{R}$ tali che `EG` è definita in $A(\alpha)\ \}$ e poi, per ogni $\alpha \notin F$, discutere l'esistenza di fattorizzazioni LR di $A(\alpha)$.

Problema 3

Per determinare gli elementi dello spazio $S = \langle 1, 2^x \rangle$ che meglio approssimano i dati

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$$

nel senso dei minimi quadrati si cercano le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare i dati da approssimare e decidere quanti sono gli elementi di S che meglio li approssimano nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

L'insieme M contiene certamente tutti i numeri interi positivi che, in base due, possono scriversi con al più tre cifre: $1, \ldots, 7$. Poiché la scrittura di 8 in base due è 1000, si ha: $8 = 2^4 \cdot 0.100$ e quindi: $8 \in M$. Invece, la scrittura di 9 in base due è 1001 e perciò $9 = 2^4 \cdot 0.1001 \notin M$. Dunque *il più piccolo numero intero positivo che non appartiene ad M è 9.*

Problema 2

Si ricordi che la procedura `EG` è definita in $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se e solo se $\det A[k] \neq 0$ per $k = 1, \ldots, n-1$.

Nel caso in esame si ha:

$$\det A[1] = 1 \quad , \quad \det A[2] = 1 \quad , \quad \det A[3] = \alpha$$

dunque: $F = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.

Per $\alpha = 0$ la matrice $A(0)$ risulta invertibile e quindi, come noto, *non esistono fattorizzazioni LR di $A(0)$.*

Problema 3

Il sistema riportato è quello che si ottiene imponendo che l'elemento $a_0 + a_1\, 2^x \in S$ interpoli i dati. Se ne deduce che $k = 4$, che gli elementi della seconda colonna della matrice del sistema sono i valori della funzione 2^x in $-1, 0, 1, 2, 2$ e che gli elementi della colonna termine noto sono i valori da interpolare. I dati sono quindi:

$$(-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (2, 1) \quad , \quad (2, 2)$$