UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 gennaio 2015

Problema 1

Siano $M = F(2,3)$ e $x = \frac{1}{6}$. Determinare $\mathrm{rd}(x)$ e verificare che l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$ non supera, in valore assoluto, la precisione di macchina.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f(x) = e^{2x} - 1 - \frac{x}{2}$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, eventualmente, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Poiché $\frac{1}{8} < \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{4}$, l'esponente di x in base due è -2 e la frazione $\frac{2}{3}$.

Dette $c_1, c_2, \ldots$ le cifre della scrittura posizionale in base due della frazione, si ha: $\frac{2}{3} = 0.c_1c_2\cdots$ e quindi $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = c_1.c_2c_3\cdots$, dunque: $c_1 = 1$ e $\frac{1}{3} = 0.c_2c_3\cdots$ Procedendo analogamente: $\frac{2}{3} = c_2.c_3c_4\cdots$ Confrontando questa scrittura di $\frac{2}{3}$ con quella iniziale si ottiene il valore di tutte le cifre:

$$\tfrac{2}{3} = 0.\overline{10}$$

da cui:

$$\tfrac{1}{6} = 2^{-2} \cdot 0.\overline{10}$$

e si constata che x *non* è un numero di macchina. Gli elementi di M adiacenti ad x sono: $\xi_s = 2^{-2} \cdot 0.101$ e $\xi_d = \sigma(\xi_s) = 2^{-2} \cdot 0.110$. Il punto medio tra i due, $2^{-2} \cdot 0.1011$, risulta *maggiore* di x e quindi:

$$\mathrm{rd}(x) = \xi_s = 2^{-2} \cdot 0.101$$

Essendo $\mathrm{rd}(x) = \frac{5}{32}$, l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$ è $-\frac{1}{16}$. Risulta infine:

$$|\text{errore relativo}| = \tfrac{1}{16} < \tfrac{1}{2}\, 2^{1-3} = \tfrac{1}{8} = \text{precisione di macchina}$$

Problema 2

Per determinare una fattorizzazione QR di A si procede cercando inizialmente due matrici $\Omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ a *colonne ortogonali* e $\Theta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *triangolare superiore con* $\theta_{11} = \theta_{22} = 1$, tali che $\Omega\,\Theta = A$. *Se matrici siffatte esistono*, quest'ultima uguaglianza, *letta per colonne*, richiede che, dette a_1, a_2 le colonne di A:

$$\omega_1 = a_1 \quad , \quad \omega_1\theta_{12} + \omega_2 = a_2$$

La colonna ω_1 è determinata dalla prima uguaglianza. Dalla seconda, moltiplicando scalarmente per ω_1 e ricordando che le colonne ω_1 e ω_2 sono ortogonali, si ottiene $\theta_{12} = \frac{1}{2}$ e poi $\omega_2 = a_2 - \omega_1\theta_{12}$. Dalle due matrici trovate si ricava una coppia U, T fattorizzazione QR di A introducendo la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|)$ e ponendo:

$$U = \Omega\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad , \quad T = \Delta\Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati (l'unicità si deduce dall'essere le colonne di A *linearmente indipendenti*) si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$$

che, utilizzando la fattorizzazione QR di A, si riduce alla forma equivalente:

$$Tx = U^{\mathsf{T}}b$$

La soluzione di quest'ultimo sistema (e quindi la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati) è: $x = 0$.

Problema 3

(a) La funzione $f(x)$ è derivabile due volte e risulta: $f'(x) = 2\,e^{2x} - \frac{1}{2}$ e $f''(x) = 4\,e^{2x}$. Quest'ultima funzione assume valori *sempre diversi da zero*, quindi f ha *al più due zeri.* Si constata che: $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) = 0$ e $f(1) > 0$. Allora: *f ha due zeri*: $\alpha_1 \in [-2, -1]$ e $\alpha_2 = 0 \in [-1, 1]$.

(b) Si constata che $f'(\alpha_1) \neq 0$ (infatti f' è crescente – perchè f'' è sempre positiva –, $f'(-1) < 0$ e $\alpha_1 < -1$) e $f'(\alpha_2) = f'(0) > 0$. Il metodo di Newton *è quindi utilizzabile per approssimare entrambi* gli zeri.

Essendo $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [-2, -1]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -2$*. Infine, essendo $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, *il metodo di Newton genera certamente una successione convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 1$.*