Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 17 gennaio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Dopo aver mostrato che $20 \in M$, determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che:

$$\xi \ominus 1 > 20$$

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Discutere, per ciascun $x \in \mathbb{R}$, l'esistenza ed unicità di fattorizzazioni LR di $A(x)$.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = e^{2x} + x - 2$.

(a) Dimostrare che f ha un solo zero.

(b) Decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare lo zero di f e, in caso affermativo, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $20 = 2^5 \cdot 0.101 \in M$. Per definizione, $\xi \ominus 1 = \mathrm{rd}(\xi - 1)$. Posto $x = \xi - 1$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 20 \quad \text{se e solo se} \quad x \geqslant 2^5 \cdot 0.1011$$

essendo $2^5 \cdot 0.1011$ il punto medio dell'intervallo di estremi 20 e $\sigma(20)$. Ne segue:

$$\xi \geqslant 2^5 \cdot 0.10111$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli inclusi nell'intervallo appena determinato, ovvero: $\xi \geqslant 2^5 \cdot 0.110 = 24$.

Problema 2

La procedura `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se i determinanti dei primi *tre* minori principali di testa sono diversi da zero e, in tal caso, la matrice ammette una sola fattorizzazione LR. La condizione è verificata se e solo se $x \neq 0$. Dunque, per ogni $x \neq 0$ la matrice $A(x)$ ha *una sola* fattorizzazione LR. Si constata inoltre che la matrice $A(0)$ è invertibile, dunque per $x = 0$ la matrice $A(x)$ *non ammette* fattorizzazioni LR.

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = 2e^{2x} + 1$$

La derivata prima è sempre diversa da zero (positiva), quindi f ha *al più uno zero*. Inoltre:

$$f(0) = -2 \qquad \text{e} \qquad f(2) = e^4$$

dunque: *f ha uno zero* e un intervallo finito che lo include è: $[0, 2]$.

Dalla condizione su f' si deduce anche che *il metodo di Newton è utilizzabile per l'approssimazione*. Inoltre, essendo:

$$f''(x) = 4e^{2x} > 0$$

il metodo di Newton genera una successione certamente convergente allo zero a partire da $x_0 = 2$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due*.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 5 febbraio 2014

Problema 1

Sia $x = \frac{1}{7}$.

(1) Determinare l'arrotondato di x in $F(3, 2)$

(2) Determinare l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare una fattorizzazione LR di A.

(2) Utilizzare la fattorizzazione determinata per constatare che A è invertibile e poi per determinare A^{-1}.

Problema 3

Si considerino i dati: $(0, 1), (1, 0), (-1, 1)$.

(1) Determinare il polinomio $p_1(x)$ di grado al più *uno* che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

(2) Decidere se vi siano polinomi di grado al più *due* che approssimano i dati, nel senso dei minimi quadrati, meglio di $p_1(x)$.

Soluzione

Problema 1

(1) Si constata che: l'esponente di x in base tre è -1, la frazione è $g = \frac{3}{7}$, e la scrittura posizionale di g è: $g = 0.102\ldots$ Dunque $x \notin F(3,2)$.

Per determinare l'arrotondato di x, si considerano i due elementi di $F(3,2)$ ad esso adiacenti:

$$\xi_1 = 3^{-1} \cdot 0.10 \qquad \text{e} \qquad \xi_2 = 3^{-1} \cdot 0.11$$

Detto m il punto medio del segmento di estremi $\xi_1 = \frac{1}{9}, \xi_2 = \frac{4}{27}$, si ha:

$$m = \tfrac{7}{54} \qquad \text{e} \qquad m < \tfrac{1}{7}$$

quindi: $\mathrm{rd}(x) = 3^{-1} \cdot 0.11$.

(2) Essendo $\mathrm{rd}(x) = \frac{4}{27}$, l'errore relativo richiesto vale:

$$\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x} = \tfrac{1}{27}$$

Problema 2

(1) Usando la procedura `EG` (definita in A, essendo $\det A[1] = 1$, $\det A[2] = 1$ e $\det A[3] = 1$) oppure il procedimento di Doolittle, si ottiene la fattorizzazione (unica):

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) La matrice A risulta invertibile poiché D lo è, dunque $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Indicando con $e_1, \ldots, e_4$ le colonne della base canonica di $\mathbb{R}^4$, l'inversa dei fattori S e D si calcola facilmente risolvendo, rispettivamente, i sistemi $Sy_k = e_k$ e $Dz_k = e_k$, $k = 1, \ldots, 4$, e ponendo:

$$S^{-1} = (y_1, \ldots, y_4) \qquad , \qquad D^{-1} = (z_1, \ldots, z_4)$$

Si ottiene:

$$A^{-1} = S^{-1}D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(1) Il polinomio $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ di grado al più uno che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è individuato dai coefficienti a_0, a_1 che si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nel senso dei minimi quadrati. Si ottiene:

$$p_1(x) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}\,x$$

che approssima i dati con errore:

$$(p_1(0) - 1)^2 + (p_1(1) - 0)^2 + (p_1(-1) - 1)^2 = \frac{3}{2}$$

(2) Il polinomio $p_2(x)$ di grado al più due che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è il polinomio interpolante, che approssima i dati con errore:

$$(p_2(0) - 1)^2 + (p_2(1) - 0)^2 + (p_2(-1) - 1)^2 = 0$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 25 febbraio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2, 5)$.

(1) Mostrare che $40 \in M$ e $200 \in M$.

(2) Determinare la massima ampiezza di un intervallo di estremi elementi consecutivi di $M \cap [40, 200]$.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare le soluzioni del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 3

Sia $h(x) = 1 - x^2$.

(1) Determinare i punti uniti di h.

(2) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

(1) Si constata che: l'esponente di 40 in base due è 6, la frazione è $g = \frac{5}{8}$, e la scrittura posizionale di g è: $g = 0.101$, dunque $x \in M$. Analogamente, $200 = 2^8 \cdot 0.11001 \in M$.

(2) Posto $\xi = \beta^b g \in F(\beta, m)$, l'ampiezza dell'intervallo di estremi $\xi, \sigma(\xi)$ è β^{b-m}. L'ampiezza massima di un intervallo con estremi elementi consecutivi di $M \cap [40, 200]$ si ottiene per $b = 8$ ($\beta = 2, m = 5$) ed è $2^{8-5} = 8$.

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1 \theta_{12} + w_2$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2 ottenendo:

$$\Omega = A, \Theta = I$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti normalizzando opportunamente le colonne di Ω. Posto

$$\Delta = \text{diag}\{\|\omega_1\|, \|\omega_2\|\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$U = \Omega \Delta^{-1} = \tfrac{1}{2} A \quad , \quad T = 2\,I$$

La fattorizzazione ottenuta si utilizza per la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati risolvendo il sistema delle equazioni normali $A^{\mathsf{T}} A x = A^{\mathsf{T}} b$ nella forma equivalente $Tx = U^{\mathsf{T}} b$. Si ottiene:

$$x = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(1) Per definizione, si cercano gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $h(\alpha) = \alpha$. Si ottengono i due valori: $\alpha_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(2) Essendo $|h'(\alpha_1)| > 1$ e $|h'(\alpha_2)| > 1$, il metodo iterativo definito da h risulta *non utilizzabile* per entrambi i punti uniti.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 giugno 2014

Problema 1

Sia $M = F(2, 53)$. Per approssimare i valori della funzione $f(x) = e^{2x}$ si utilizza la funzione $\phi(\xi) = \texttt{EXP}(2 \otimes \xi)$ dove $\texttt{EXP} : M \to M$ è la funzione definita da $\texttt{EXP}(\xi) = \mathrm{rd}(e^{\xi})$.

(1) Dimostrare che per ogni $\xi \in M$ si ha: $2 \otimes \xi = 2\,\xi$, ovvero che l'errore commesso approssimando 2ξ con $2 \otimes \xi$ è *zero*.

(2) Tenuto conto del risultato del punto (1), determinare la funzione di stabilità di ϕ quando utilizzata per approssimare f.

Problema 2

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Determinare tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A(\alpha)$ è definita positiva.

Problema 3

Per approssimare la funzione $f(x) = e^{2x}$ sull'intervallo $[0, 5]$, scelto N intero positivo e posto

$$x_j = j\,\tfrac{5}{N} \quad , \quad j = 0, \ldots, N$$

si utilizza l'unica funzione g continua lineare a tratti (sugli intervalli definiti dalle x_j) che interpola i dati:

$$(x_j, f(x_j)) \quad , \quad j = 0, \ldots, N$$

Determinare N in modo che:

$$\max_{x \in [0,5]} |f(x) - g(x)| \leqslant 10^{-2}$$

(Suggerimento: si interpreti il problema come campionamento e ricostruzione della funzione f.)

Soluzione

Problema 1

(1) Per ogni $\xi \in M$ non zero si ha:

$$\xi = 2^b \cdot 0, c_1 \cdots c_{53}$$

e quindi:

$$2\xi = 2^{b+1} \cdot 0, c_1 \cdots c_{53} \in M$$

(2) Essendo, come mostrato sopra: $2 \otimes \xi = \mathrm{rd}(2\xi) = 2\xi$, si ha:

$$\phi(\xi) = \mathtt{EXP}(2 \otimes \xi) = \mathtt{EXP}(2\xi) = \mathrm{rd}(e^{2\xi}) = e^{2\xi}(1 + \epsilon)$$

con ϵ l'errore algoritmico commesso approssimando l'esponenziale con la funzione `EXP`. Quindi:

$$S(\xi, \epsilon) = \frac{\phi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)} = \epsilon$$

Problema 2

La matrice $A(\alpha)$ è definita positiva se e solo se *tutti* i minori principali di testa hanno determinante *positivo*. Le condizioni sono quindi:

$$\alpha > 0 \qquad , \qquad \alpha - 4 > 0 \qquad , \qquad \alpha(\alpha - 5) > 0$$

che equivalgono a: $\alpha > 5$.

Problema 3

Il problema consiste nel *campionare la funzione $f(x)$ e ottenere una ricostruzione $g(x)$ mediante interpolazione con funzioni continue lineari a tratti sugli intervalli definiti dalle x_j con errore di ricostruzione $e(f)$ non superiore a* 10^{-2}.

Si ricordi che per funzioni con derivata seconda continua, posto $M_2 = \max |f^{(2)}|$ e detta h la massima ampiezza degli intervalli considerati, vale la stima:

$$e(f) = \max |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2$$

Nel caso in esame, essendo $h = \frac{5}{N}$ e $[0, 5]$ l'intervallo in esame, si ottiene l'errore richiesto scegliendo:

$$N \geqslant 50\sqrt{\frac{e^{10}}{2}} = 5247, 1 \ldots$$

ovvero: $N = 5248$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 8 luglio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che:

$$\xi \otimes \xi > 2$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare il numero di condizionamento di A in norma *uno*: $c_1(A)$.

(2) Dati b e δb in $\mathbb{R}^2$, siano x_* la soluzione del sistema $Ax = b$ ed $\tilde{x}$ la soluzione del sistema perturbato $Ax = b + \delta b$. Sapendo che:

$$\epsilon_b = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} = 10^{-2}$$

stimare il massimo valore dell'errore relativo trasmesso dai dati:

$$\epsilon_d = \frac{\|\tilde{x} - x_*\|_1}{\|x_*\|_1}$$

Problema 3

Decidere quale tra i *due* polinomi:

$$p_1(x) = x^3 - x + 3 \qquad , \qquad p_2(x) = (x-1)(x-2)$$

approssima meglio i dati:

$$(-2,0) \quad , \quad (-1,1) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad (2,0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, $\xi \otimes \xi = \mathrm{rd}(\xi^2)$. Posto $x = \xi^2$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 2 \quad \text{se e solo se} \quad x > 2^2 \cdot 0.1001$$

essendo $2^2 \cdot 0.1001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 2 e $\sigma(2)$. Ne segue:

$$|\xi| > \sqrt{2^2 \cdot 0.1001} \quad \text{ovvero (passando in base dieci)} \quad |\xi| > \tfrac{3}{2}$$

Problema 2

(1) Per determinare il numero di condizionamento occorre determinare la matrice A^{-1} che risulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Infine: $\|A\|_1 = 5$ e $\|A^{-1}\|_1 = 5$ e quindi $c_1(A) = 25$.
(2) La stima del massimo errore relativo trasmesso dai dati si ottiene dallo studio del *condizionamento* del problema del calcolo della soluzione del sistema $Ax = b$:

$$\epsilon_d \leqslant c_1(A)\, \epsilon_b$$

La stima del massimo errore relativo trasmesso dai dati è quindi

$$\epsilon_d \leqslant 25 \cdot 10^{-2}$$

Problema 3

La quantità che misura l'errore nel senso dei minimi quadrati per la funzione $f(x)$ è:

$$E(f) = (f(-2) - 0)^2 + (f(-1) - 1)^2 + (f(0) - 1)^2 + (f(1) - 0)^2 + (f(2) - 0)^2$$

Per i due polinomi da considerare si ottiene:

$$E(p_1) = 107 \qquad , \qquad E(p_2) = 170$$

Dunque, tra i due elementi, quello che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è p_1.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 luglio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare tutti i numeri *reali* x tali che:

$$\mathrm{rd}(x) \ominus 1 = 0$$

Problema 2

Per ogni $\alpha \in [0,1]$ siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare una fattorizzazione LR di A;

(2) Utilizzare la fattorizzazione trovata per risolvere il sistema $Ax = b$ e, detta x_* la soluzione, mostrare che per ogni $\alpha \in [0,1]$ si ha: $\|x_*\|_1 = 1$.

Problema 3

Sia $F(x) = e^x - 2 + x$.

(1) Determinare il numero di zeri di F e separarli;

(2) Per ciascuno degli zeri di F decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton risulta convergente allo zero.

Soluzione

Problema 1

Per definizione di pseudo sottrazione e per le proprietà della funzione rd, i numeri reali x cercati sono quelli tali che: $\mathrm{rd}(x) = 1$. Detti m_1 il punto medio del segmento $[\pi(1), 1]$ e m_2 quello del segmento $[1, \sigma(1)]$, l'insieme cercato è:

$$x \in [m_1, m_2[= [2^0 \cdot 0.11111, 2^1 \cdot 0.10001[= [\tfrac{31}{32}, \tfrac{17}{16}[$$

Problema 2

(1) Poiché $\det A[1] \neq 0$ e $\det A[2] \neq 0$, la fattorizzazione LR di A è unica e risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) Essendo $\det A = \det D = -2$, il sistema $Ax = b$ ha soluzione unica per ogni α. Utilizzando la fattorizzazione determinata al punto precedente, la soluzione cercata si determina risolvendo prima il sistema $Sc = b$ e poi il sistema $Dx = c$. Si ottiene:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

Infine, si ha, tenuto conto che $\alpha \in [0, 1]$:

$$\|x_*\|_1 = \frac{1}{2}(|1-\alpha| + |\alpha| + 1) = 1$$

Problema 3

(1) Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $F'(x) > 0$, la funzione ha *al più* uno zero. Inoltre $F(0) = -2 < 0$ e $F(2) = e^2 > 0$, dunque F, continua, ha uno zero nell'intervallo $[0, 2]$.
(2) Per quanto constatato nel punto precedente su F', il metodo di Newton è utilizzabile e la successione risulterà di ordine due. Essendo anche $F''(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$, un punto a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton risulta convergente allo zero è $x_0 = 2$.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 23 settembre 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Decidere se:

$$(1 \oslash 3) \oplus (2 \oslash 3) = 1$$

Problema 2

Determinare l'elemento di $P_0(\mathbb{R})$ che meglio approssima i dati:

$$(0,1) \quad , \quad (0,-1) \quad , \quad (0,2) \quad , \quad (0,2) \quad , \quad (0,-3)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Problema 3

Sia $h(x) = \log(x+2)$.

(1) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli;

(2) Per ciascuno dei punti uniti di h, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo risulta convergente al punto unito.

Soluzione

Problema 1

Operando in $F(2,4)$ si ha:

$$1 \oslash 3 = \mathrm{rd}(\tfrac{1}{3}) = 2^{-1} \cdot 0.1011 \quad \text{e} \quad 2 \oslash 3 = \mathrm{rd}(\tfrac{2}{3}) = 2^{0} \cdot 0.1011$$

Infine:

$$(1 \oslash 3) \oplus (2 \oslash 3) = \mathrm{rd}(2^{-1} \cdot 0.1011 + 2^{0} \cdot 0.1011) = \mathrm{rd}(2^{1} \cdot 0.100001) = 1$$

Problema 2

Tra tutte le funzioni $p(t)$ della forma $p(t) = a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$, si cercano quelle che rendono minima la quantità:

$$(p(0)-1)^2 + (p(0)+1)^2 + (p(0)-2)^2 + (p(0)-2)^2 + (p(0)+3)^2$$

Gli elementi cercati si trovano determinando le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema:

$$5\, a_0 = 1$$

L'unico elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati risulta:

$$p(t) = \tfrac{1}{5}$$

Problema 3

(1) Sia $F(x) = \log(x+2) - x$, funzione definita per $x > -2$. Gli zeri di F sono tutti e soli i punti uniti di h. Inoltre: $F''(x) \neq 0$ per ogni $x > -2$ [perciò F ha al più due zeri] e: $\lim_{x \to -2} F(x) = -\infty$, $F(-1) > 0$, $F(0) > 0$, $F(2) < 0$. Dunque F ha due zeri: $\alpha_1 \in [-2,-1]$ e $\alpha_2 \in [0,2]$.
(2) Si ha: $h'(\alpha_1) > 1$ e $0 < h'(\alpha_2) < 1$, dunque il metodo *non è utilizzabile per approssimare* α_1 mentre *è utilizzabile per approssimare* α_2. Inoltre, essendo $0 < h'(x) < 1$ per ogni $x \in [0,2]$, per ogni $x_0 \in [0,2]$ la successione generata dal metodo risulta monotona e convergente a α_2.