UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 23 settembre 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Decidere se:

$$(1 \oslash 3) \oplus (2 \oslash 3) = 1$$

Problema 2

Determinare l'elemento di $P_0(\mathbb{R})$ che meglio approssima i dati:

$$(0,1) \quad , \quad (0,-1) \quad , \quad (0,2) \quad , \quad (0,2) \quad , \quad (0,-3)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Problema 3

Sia $h(x) = \log(x+2)$.

(1) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli;

(2) Per ciascuno dei punti uniti di h, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo risulta convergente al punto unito.

Soluzione

Problema 1

Operando in $F(2,4)$ si ha:

$$1 \oslash 3 = \mathrm{rd}(\tfrac{1}{3}) = 2^{-1} \cdot 0.1011 \quad \text{e} \quad 2 \oslash 3 = \mathrm{rd}(\tfrac{2}{3}) = 2^{0} \cdot 0.1011$$

Infine:

$$(1 \oslash 3) \oplus (2 \oslash 3) = \mathrm{rd}(2^{-1} \cdot 0.1011 + 2^{0} \cdot 0.1011) = \mathrm{rd}(2^{1} \cdot 0.100001) = 1$$

Problema 2

Tra tutte le funzioni $p(t)$ della forma $p(t) = a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$, si cercano quelle che rendono minima la quantità:

$$(p(0)-1)^2 + (p(0)+1)^2 + (p(0)-2)^2 + (p(0)-2)^2 + (p(0)+3)^2$$

Gli elementi cercati si trovano determinando le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema:

$$5\, a_0 = 1$$

L'unico elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati risulta:

$$p(t) = \tfrac{1}{5}$$

Problema 3

(1) Sia $F(x) = \log(x+2) - x$, funzione definita per $x > -2$. Gli zeri di F sono tutti e soli i punti uniti di h. Inoltre: $F''(x) \neq 0$ per ogni $x > -2$ [perciò F ha al più due zeri] e: $\lim_{x \to -2} F(x) = -\infty$, $F(-1) > 0$, $F(0) > 0$, $F(2) < 0$. Dunque F ha due zeri: $\alpha_1 \in [-2, -1]$ e $\alpha_2 \in [0, 2]$.
(2) Si ha: $h'(\alpha_1) > 1$ e $0 < h'(\alpha_2) < 1$, dunque il metodo *non è utilizzabile per approssimare* α_1 mentre *è utilizzabile per approssimare* α_2. Inoltre, essendo $0 < h'(x) < 1$ per ogni $x \in [0, 2]$, per ogni $x_0 \in [0, 2]$ la successione generata dal metodo risulta monotona e convergente a α_2.