Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 luglio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2, 4)$. Determinare tutti i numeri *reali* x tali che:

$$\mathrm{rd}(x) \ominus 1 = 0$$

Problema 2

Per ogni $\alpha \in [0, 1]$ siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare una fattorizzazione LR di A;

(2) Utilizzare la fattorizzazione trovata per risolvere il sistema $Ax = b$ e, detta x_* la soluzione, mostrare che per ogni $\alpha \in [0, 1]$ si ha: $\|x_*\|_1 = 1$.

Problema 3

Sia $F(x) = e^x - 2 + x$.

(1) Determinare il numero di zeri di F e separarli;

(2) Per ciascuno degli zeri di F decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton risulta convergente allo zero.

Soluzione

Problema 1

Per definizione di pseudo sottrazione e per le proprietà della funzione rd, i numeri reali x cercati sono quelli tali che: $\mathrm{rd}(x) = 1$. Detti m_1 il punto medio del segmento $[\pi(1), 1]$ e m_2 quello del segmento $[1, \sigma(1)]$, l'insieme cercato è:

$$x \in [m_1, m_2[= [2^0 \cdot 0.11111, 2^1 \cdot 0.10001[= [\tfrac{31}{32}, \tfrac{17}{16}[$$

Problema 2

(1) Poiché $\det A[1] \neq 0$ e $\det A[2] \neq 0$, la fattorizzazione LR di A è unica e risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) Essendo $\det A = \det D = -2$, il sistema $Ax = b$ ha soluzione unica per ogni α. Utilizzando la fattorizzazione determinata al punto precedente, la soluzione cercata si determina risolvendo prima il sistema $Sc = b$ e poi il sistema $Dx = c$. Si ottiene:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

Infine, si ha, tenuto conto che $\alpha \in [0, 1]$:

$$\|x_*\|_1 = \frac{1}{2}(|1-\alpha| + |\alpha| + 1) = 1$$

Problema 3

(1) Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $F'(x) > 0$, la funzione ha *al più* uno zero. Inoltre $F(0) = -2 < 0$ e $F(2) = e^2 > 0$, dunque F, continua, ha uno zero nell'intervallo $[0, 2]$.
(2) Per quanto constatato nel punto precedente su F', il metodo di Newton è utilizzabile e la successione risulterà di ordine due. Essendo anche $F''(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$, un punto a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton risulta convergente allo zero è $x_0 = 2$.