Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 8 luglio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che:

$$\xi \otimes \xi > 2$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare il numero di condizionamento di A in norma *uno*: $c_1(A)$.

(2) Dati b e δb in $\mathbb{R}^2$, siano x_* la soluzione del sistema $Ax = b$ ed $\tilde{x}$ la soluzione del sistema perturbato $Ax = b + \delta b$. Sapendo che:

$$\epsilon_b = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} = 10^{-2}$$

stimare il massimo valore dell'errore relativo trasmesso dai dati:

$$\epsilon_d = \frac{\|\tilde{x} - x_*\|_1}{\|x_*\|_1}$$

Problema 3

Decidere quale tra i *due* polinomi:

$$p_1(x) = x^3 - x + 3 \qquad , \qquad p_2(x) = (x-1)(x-2)$$

approssima meglio i dati:

$$(-2,0) \quad , \quad (-1,1) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad (2,0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, $\xi \otimes \xi = \mathrm{rd}(\xi^2)$. Posto $x = \xi^2$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 2 \quad \text{se e solo se} \quad x > 2^2 \cdot 0.1001$$

essendo $2^2 \cdot 0.1001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 2 e $\sigma(2)$. Ne segue:

$$|\xi| > \sqrt{2^2 \cdot 0.1001} \quad \text{ovvero (passando in base dieci)} \quad |\xi| > \tfrac{3}{2}$$

Problema 2

(1) Per determinare il numero di condizionamento occorre determinare la matrice A^{-1} che risulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Infine: $\|A\|_1 = 5$ e $\|A^{-1}\|_1 = 5$ e quindi $c_1(A) = 25$.
(2) La stima del massimo errore relativo trasmesso dai dati si ottiene dallo studio del *condizionamento* del problema del calcolo della soluzione del sistema $Ax = b$:

$$\epsilon_d \leqslant c_1(A)\, \epsilon_b$$

La stima del massimo errore relativo trasmesso dai dati è quindi

$$\epsilon_d \leqslant 25 \cdot 10^{-2}$$

Problema 3

La quantità che misura l'errore nel senso dei minimi quadrati per la funzione $f(x)$ è:

$$E(f) = (f(-2) - 0)^2 + (f(-1) - 1)^2 + (f(0) - 1)^2 + (f(1) - 0)^2 + (f(2) - 0)^2$$

Per i due polinomi da considerare si ottiene:

$$E(p_1) = 107 \qquad , \qquad E(p_2) = 170$$

Dunque, tra i due elementi, quello che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è p_1.