Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 giugno 2014

Problema 1

Sia $M = F(2, 53)$. Per approssimare i valori della funzione $f(x) = e^{2x}$ si utilizza la funzione $\phi(\xi) = \mathtt{EXP}(2 \otimes \xi)$ dove $\mathtt{EXP} : M \to M$ è la funzione definita da $\mathtt{EXP}(\xi) = \mathrm{rd}(e^{\xi})$.

(1) Dimostrare che per ogni $\xi \in M$ si ha: $2 \otimes \xi = 2\,\xi$, ovvero che l'errore commesso approssimando 2ξ con $2 \otimes \xi$ è *zero*.

(2) Tenuto conto del risultato del punto (1), determinare la funzione di stabilità di ϕ quando utilizzata per approssimare f.

Problema 2

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Determinare tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A(\alpha)$ è definita positiva.

Problema 3

Per approssimare la funzione $f(x) = e^{2x}$ sull'intervallo $[0, 5]$, scelto N intero positivo e posto

$$x_j = j\,\tfrac{5}{N} \quad , \quad j = 0, \ldots, N$$

si utilizza l'unica funzione g continua lineare a tratti (sugli intervalli definiti dalle x_j) che interpola i dati:

$$(x_j, f(x_j)) \quad , \quad j = 0, \ldots, N$$

Determinare N in modo che:

$$\max_{x \in [0,5]} |f(x) - g(x)| \leqslant 10^{-2}$$

(Suggerimento: si interpreti il problema come campionamento e ricostruzione della funzione f.)

Soluzione

Problema 1

(1) Per ogni $\xi \in M$ non zero si ha:

$$\xi = 2^b \cdot 0, c_1 \cdots c_{53}$$

e quindi:

$$2\xi = 2^{b+1} \cdot 0, c_1 \cdots c_{53} \in M$$

(2) Essendo, come mostrato sopra: $2 \otimes \xi = \mathrm{rd}(2\xi) = 2\xi$, si ha:

$$\phi(\xi) = \mathtt{EXP}(2 \otimes \xi) = \mathtt{EXP}(2\xi) = \mathrm{rd}(e^{2\xi}) = e^{2\xi}(1 + \epsilon)$$

con ϵ l'errore algoritmico commesso approssimando l'esponenziale con la funzione `EXP`. Quindi:

$$S(\xi, \epsilon) = \frac{\phi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)} = \epsilon$$

Problema 2

La matrice $A(\alpha)$ è definita positiva se e solo se *tutti* i minori principali di testa hanno determinante *positivo*. Le condizioni sono quindi:

$$\alpha > 0 \qquad , \qquad \alpha - 4 > 0 \qquad , \qquad \alpha(\alpha - 5) > 0$$

che equivalgono a: $\alpha > 5$.

Problema 3

Il problema consiste nel *campionare la funzione $f(x)$ e ottenere una ricostruzione $g(x)$ mediante interpolazione con funzioni continue lineari a tratti sugli intervalli definiti dalle x_j con errore di ricostruzione $e(f)$ non superiore a 10^{-2}.*

Si ricordi che per funzioni con derivata seconda continua, posto $M_2 = \max |f^{(2)}|$ e detta h la massima ampiezza degli intervalli considerati, vale la stima:

$$e(f) = \max |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2$$

Nel caso in esame, essendo $h = \frac{5}{N}$ e $[0, 5]$ l'intervallo in esame, si ottiene l'errore richiesto scegliendo:

$$N \geqslant 50 \sqrt{\frac{e^{10}}{2}} = 5247, 1 \ldots$$

ovvero: $N = 5248$.