Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 25 febbraio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2, 5)$.

(1) Mostrare che $40 \in M$ e $200 \in M$.

(2) Determinare la massima ampiezza di un intervallo di estremi elementi consecutivi di $M \cap [40, 200]$.

Problema 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare le soluzioni del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Problema 3

Sia $h(x) = 1 - x^2$.

(1) Determinare i punti uniti di h.

(2) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

(1) Si constata che: l'esponente di 40 in base due è 6, la frazione è $g = \frac{5}{8}$, e la scrittura posizionale di g è: $g = 0.101$, dunque $x \in M$. Analogamente, $200 = 2^8 \cdot 0.11001 \in M$.
(2) Posto $\xi = \beta^b g \in F(\beta, m)$, l'ampiezza dell'intervallo di estremi $\xi, \sigma(\xi)$ è β^{b-m}. L'ampiezza massima di un intervallo con estremi elementi consecutivi di $M \cap [40, 200]$ si ottiene per $b = 8$ ($\beta = 2, m = 5$) ed è $2^{8-5} = 8$.

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12} \in \mathbb{R}$ tali che
$$A = (w_1, w_2) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2 le colonne di A:
$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2$$
Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2 ottenendo:
$$\Omega = A, \Theta = I$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti normalizzando opportunamente le colonne di Ω. Posto
$$\Delta = \mathrm{diag}\{\|\omega_1\|, \|\omega_2\|\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
si ottiene:
$$U = \Omega\Delta^{-1} = \tfrac{1}{2}A \quad , \quad T = 2\,I$$

La fattorizzazione ottenuta si utilizza per la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati risolvendo il sistema delle equazioni normali $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$ nella forma equivalente $Tx = U^{\mathsf{T}}b$. Si ottiene:
$$x = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(1) Per definizione, si cercano gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $h(\alpha) = \alpha$. Si ottengono i due valori: $\alpha_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
(2) Essendo $|h'(\alpha_1)| > 1$ e $|h'(\alpha_2)| > 1$, il metodo iterativo definito da h risulta *non utilizzabile* per entrambi i punti uniti.