Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 5 febbraio 2014

Problema 1

Sia $x = \frac{1}{7}$.

(1) Determinare l'arrotondato di x in $F(3, 2)$

(2) Determinare l'errore relativo commesso approssimando x con $\mathrm{rd}(x)$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare una fattorizzazione LR di A.

(2) Utilizzare la fattorizzazione determinata per constatare che A è invertibile e poi per determinare A^{-1}.

Problema 3

Si considerino i dati: $(0, 1), (1, 0), (-1, 1)$.

(1) Determinare il polinomio $p_1(x)$ di grado al più *uno* che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

(2) Decidere se vi siano polinomi di grado al più *due* che approssimano i dati, nel senso dei minimi quadrati, meglio di $p_1(x)$.

Soluzione

Problema 1

(1) Si constata che: l'esponente di x in base tre è -1, la frazione è $g = \frac{3}{7}$, e la scrittura posizionale di g è: $g = 0.102\ldots$ Dunque $x \notin F(3,2)$.

Per determinare l'arrotondato di x, si considerano i due elementi di $F(3,2)$ ad esso adiacenti:

$$\xi_1 = 3^{-1} \cdot 0.10 \qquad \text{e} \qquad \xi_2 = 3^{-1} \cdot 0.11$$

Detto m il punto medio del segmento di estremi $\xi_1 = \frac{1}{9}, \xi_2 = \frac{4}{27}$, si ha:

$$m = \tfrac{7}{54} \qquad \text{e} \qquad m < \tfrac{1}{7}$$

quindi: $\mathrm{rd}(x) = 3^{-1} \cdot 0.11$.

(2) Essendo $\mathrm{rd}(x) = \frac{4}{27}$, l'errore relativo richiesto vale:

$$\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x} = \tfrac{1}{27}$$

Problema 2

(1) Usando la procedura `EG` (definita in A, essendo $\det A[1] = 1$, $\det A[2] = 1$ e $\det A[3] = 1$) oppure il procedimento di Doolittle, si ottiene la fattorizzazione (unica):

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) La matrice A risulta invertibile poiché D lo è, dunque $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Indicando con $e_1, \ldots, e_4$ le colonne della base canonica di $\mathbb{R}^4$, l'inversa dei fattori S e D si calcola facilmente risolvendo, rispettivamente, i sistemi $Sy_k = e_k$ e $Dz_k = e_k$, $k = 1, \ldots, 4$, e ponendo:

$$S^{-1} = (y_1, \ldots, y_4) \qquad , \qquad D^{-1} = (z_1, \ldots, z_4)$$

Si ottiene:

$$A^{-1} = S^{-1}D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

(1) Il polinomio $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ di grado al più uno che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è individuato dai coefficienti a_0, a_1 che si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nel senso dei minimi quadrati. Si ottiene:

$$p_1(x) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}\,x$$

che approssima i dati con errore:

$$(p_1(0) - 1)^2 + (p_1(1) - 0)^2 + (p_1(-1) - 1)^2 = \frac{3}{2}$$

(2) Il polinomio $p_2(x)$ di grado al più due che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è il polinomio interpolante, che approssima i dati con errore:

$$(p_2(0) - 1)^2 + (p_2(1) - 0)^2 + (p_2(-1) - 1)^2 = 0$$