Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 17 gennaio 2014

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Dopo aver mostrato che $20 \in M$, determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che:

$$\xi \ominus 1 > 20$$

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Discutere, per ciascun $x \in \mathbb{R}$, l'esistenza ed unicità di fattorizzazioni LR di $A(x)$.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = e^{2x} + x - 2$.

(a) Dimostrare che f ha un solo zero.

(b) Decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare lo zero di f e, in caso affermativo, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $20 = 2^5 \cdot 0.101 \in M$. Per definizione, $\xi \ominus 1 = \mathrm{rd}(\xi - 1)$. Posto $x = \xi - 1$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 20 \quad \text{se e solo se} \quad x \geqslant 2^5 \cdot 0.1011$$

essendo $2^5 \cdot 0.1011$ il punto medio dell'intervallo di estremi 20 e $\sigma(20)$. Ne segue:

$$\xi \geqslant 2^5 \cdot 0.10111$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli inclusi nell'intervallo appena determinato, ovvero: $\xi \geqslant 2^5 \cdot 0.110 = 24$.

Problema 2

La procedura `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se i determinanti dei primi *tre* minori principali di testa sono diversi da zero e, in tal caso, la matrice ammette una sola fattorizzazione LR. La condizione è verificata se e solo se $x \neq 0$. Dunque, per ogni $x \neq 0$ la matrice $A(x)$ ha *una sola* fattorizzazione LR. Si constata inoltre che la matrice $A(0)$ è invertibile, dunque per $x = 0$ la matrice $A(x)$ *non ammette* fattorizzazioni LR.

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = 2e^{2x} + 1$$

La derivata prima è sempre diversa da zero (positiva), quindi f ha *al più uno zero*. Inoltre:

$$f(0) = -2 \qquad \text{e} \qquad f(2) = e^4$$

dunque: *f ha uno zero* e un intervallo finito che lo include è: $[0, 2]$.

Dalla condizione su f' si deduce anche che *il metodo di Newton è utilizzabile per l'approssimazione*. Inoltre, essendo:

$$f''(x) = 4e^{2x} > 0$$

il metodo di Newton genera una successione certamente convergente allo zero a partire da $x_0 = 2$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due*.