Esercizio del 25 marzo 2013.

Testo

Sia $h(x) = x^2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- Determinare i punti uniti di h (siano α_0, α_1).
- Determinare $h'(\alpha_0)$ e $h'(\alpha_1)$ ed utilizzarli per decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per approssimare α_0 ed α_1.
- Modificare il file di esempio relativo ai metodi ad un punto (ovvero il file `LMV_MetodiUnPunto_00.sce`) per utilizzarlo con la funzione h assegnata (N.B: utilizzare opportunamente l'operatore `.^`: se `x` è una matrice $r \times s$, allora `x.^2` = la matrice $r \times s$ di elemento i, j dato da $\mathtt{x}_{ij}^2$.)
- Scegliere $x_0 = 0.46$ ed interpretare il grafico finale riguardante la stima dell'errore.
- Scegliere $x_0 = 0.5$ e giustificare l'errore dichiarato dalla procedura.
- Scegliere $x_0 = -1$ ed interpretare i risultati (l'iterazione termina con successo, ma poi nasce un problema col grafico finale . . .)
- Scegliere $x_0 = -0.999$ e poi $x_0 = -1.001$: accade qualcosa di "imprevisto"?
- Determinare tutti i valori di x_0 tali che *la successione* generata dal metodo iterativo definito da h a partire da x_0 *converge ad* 1.

Soluzione

Un punto unito di h è un numero reale α tale che $h(\alpha) = \alpha$, ovvero tale che:

$$\alpha^2 = \alpha$$

Questa equazione ha *due* soluzioni: $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = 1$. Il risultato è coerente con la Figura 1, in cui sono rappresentati i grafici delle funzioni $y = h(x)$ ed $y = x$ sull'intervallo $-1 \leqslant x \leqslant 2$ ed i punti di coordinate $(0, 0)$ ed $(1, 1)$.

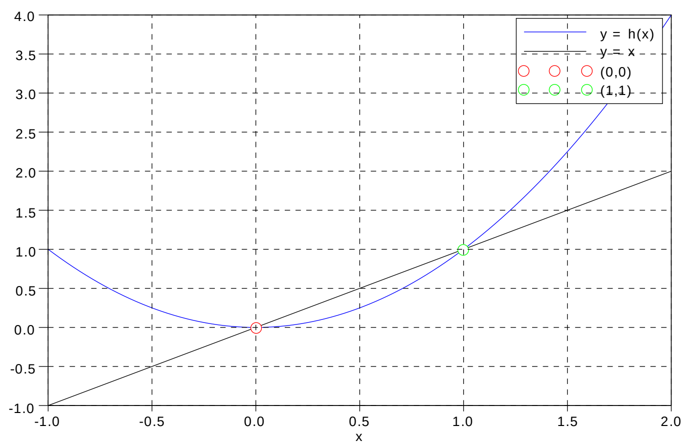

Figura 1: Punti uniti di h.

La derivata prima di h è:

$$h'(x) = 2\,x$$

e quindi:

$$h'(\alpha_0) = h'(0) = 0 \quad , \quad h'(\alpha_1) = h'(1) = 2$$

In base al *Teorema di convergenza locale*, tenuto conto che la funzione h' è continua, si conclude che α_0 *è certamente approssimabile con il metodo iterativo definito da h*. Il Teorema, invece, non consente di decidere nulla per α_1. Ma, essendo $|h'(\alpha_1)| > 1$, si può concludere che *il metodo definito da h non è utilizzabile per approssimare α_1*.

Per utilizzare il file `LMV_MetodiUnPunto_00.sce` è necessario *modificare le definizioni della funzione* `h` *e della funzione* `dh`. La prima è la funzione utilizzata, nella sezione `Iterazione` del file, per generare la successione; la seconda è la derivata prima della precedente ed è utilizzata, nella stessa sezione del file, nel criterio di arresto dell'iterazione.

Delle funzioni `h` e |`dh`|, prima dell'avvio dell'iterazione, viene disegnato il grafico in due sottofinestre verticalmente allineate. Questi grafici hanno lo scopo di aiutare l'utilizzatore nella scelta del punto iniziale x_0. I grafici sono disegnati dalle istruzioni:

`plot(xx,h(xx),"b",xx,xx,"k")` e `plot(xx,abs(dh(xx)),"b")`

In queste istruzioni, `xx` è una riga (una matrice 1×200), quindi le funzioni `h` e `dh` devono accettare come argomento una riga di tale dimensione (in generale, devono accettare una matrice $r \times s$). Per tale motivo le definizioni di `h` e `dh` sono così modificate:

```
function y = h(x)
    y = x.^2
endfunction
```

e

```
function j = dh(x)
    j = 2*x
endfunction
```

Non è necessario, invece, modificare la definizione della variabile `xx`.

Si utilizza adesso il file modificato scegliendo, di volta in volta, valori diversi per x_0.

Scelto $x_0 = 0.46$, l'iterazione termina con successo (come indicato dal valore 1 del *flag* `info`) con un valore finale:

$$\mathtt{z} = 1.615 \cdot 10^{-11}$$

La successione approssima quindi il punto unito $\alpha_0 = 0$.

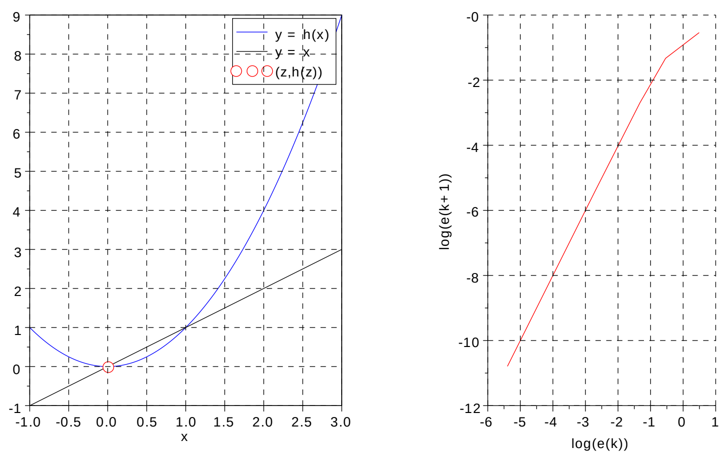

Figura 2: Figura finale nel caso $x_0 = 0.46$.

La figura finale (Figura 2) è costituita da due disegni affiancati. Nel primo è riportato, insieme ai grafici delle funzioni $y = h(x)$ e $y = x$, il punto $(\mathtt{z}, h(\mathtt{z}))$. Nel secondo è riportato il grafico del logaritmo in base dieci della stima dell'errore al passo $k+1$ ($\log_{10}(e_{k+1})$) in funzione del logaritmo in base dieci della stima al passo k ($\log_{10}(e_k)$). Da questo grafico si nota che nella parte finale dell'iterazione (quella corrispondente alla parte di grafico in basso a sinistra: si ricordi che $e_k \to 0$) si ha:

$$\log_{10}(e_{k+1}) = 2\,\log_{10}(e_k) \quad \text{e quindi} \quad e_{k+1} = e_k^2$$

Questo andamento è coerente con l'essere $h'(\alpha_0) = 0$: l'ordine di convergenza del metodo definito da h, quando utilizzato per approssimare α_0, è *due*.

Scelto $x_0 = 0.5$, l'iterazione si arresta segnalando una *divisione per zero* nel calcolo della stima dell'errore:

```
StimaErr($+1) = abs((h(x_mit) - x_mit)/(dh(x_mit) - 1));
```

In effetti si ha $h'(x_0) = 1$ e quindi il denominatore calcolato alla stima dell'errore precedente la prima iterazione è zero. Si osservi che il valore del flag `info` è 2, e questo valore è noto alla procedura *prima* di incappare nel calcolo che ha prodotto l'errore. Si potrebbe quindi modificare la procedura per evitare il generarsi dell'errore ...

Scelto $x_0 = -1$, l'iterazione termina con successo (come indicato dal valore 1 del *flag* `info`) con un valore finale:

$$\mathtt{z} = 1$$

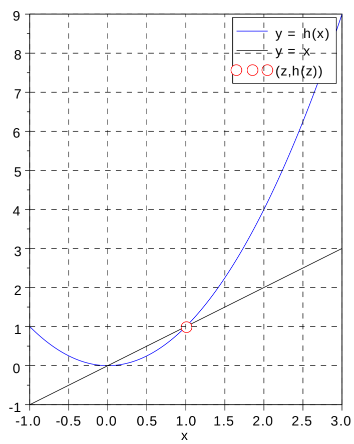

Figura 3: Figura finale nel caso $x_0 = -1$.

La successione approssima quindi il punto unito $\alpha_1 = 1$, come evidenziato anche dall'ultima figura disegnata (Figura 3). L'errore segnalato è relativo al calcolo della funzione `log10` nell'istruzione:

```
plot2d(log10(StimaErr(1:$-1)),log10(StimaErr(2:$)),5,frameflag=4);
```

che dovrebbe disegnare il grafico riguardante la stima dell'errore assoluto (l'esecuzione dei comandi si interrompe, e quindi nella figura quest'ultimo grafico manca). Quando l'iterazione si arresta, la variabile `StimaErr` vale:

$$\texttt{StimaErr} = \begin{bmatrix} 0.6666667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ed è corretto che l'interprete di Scilab segnali la presenza di un valore singolare (zero) per la funzione `log`. Il valore 0 della seconda componente del vettore `StimaErr` è dovuto all'essere $x_1 = 1$, ovvero $x_1 = \alpha_1$.

Si ricordi che il metodo iterativo definito da h è stato dichiarato *non utilizzabile* per approssimare il punto unito α_1, perché $|h'(\alpha_1)| > 1$. Quest'ultima condizione significa che *o* la successione generata dal metodo *non* converge ad α_1, *o* dopo un numero finito di passi si ha $x_k = \alpha_1$. Questo è ciò che accade, infatti $x_1 = \alpha_1$.

Scelto $x_0 = -0.999$, l'iterazione termina con successo (come indicato dal valore 1 del *flag* `info`) con un valore finale:

$$\texttt{z} = 7.603 \cdot 10^{-8}$$

La successione approssima quindi il punto unito $\alpha_0 = 0$, come evidenziato anche dall'ultima figura disegnata (Figura 4).

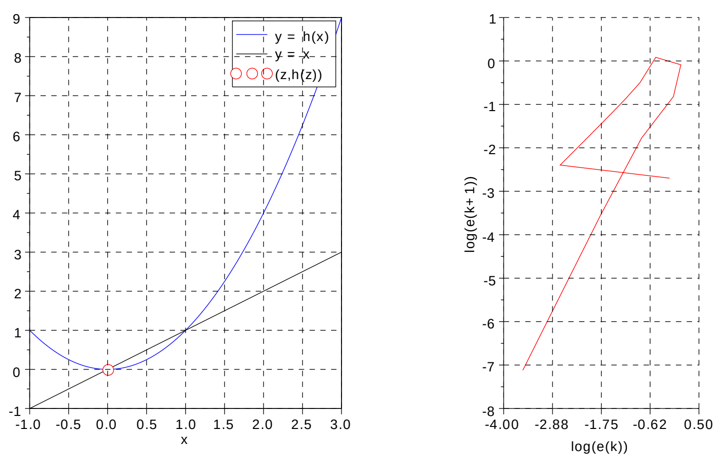

Figura 4: Figura finale nel caso $x_0 = -0.999$.

Il secondo grafico della figura (quello relativo all'errore) ha un andamento iniziale (la curva è percorsa da destra verso sinistra) "irregolare". Per rendersi conto che questo andamento non è così strano, si ricordi che questa curva rappresenta opportunamente le *stime* dell'errore assoluto $|x_k - \alpha_0|$, e che l'errore assoluto ha un andamento certamente "regolare" solo per x_k *vicino* ad α_0.

Scelto $x_0 = -1.001$, l'iterazione termina dopo aver superato il numero massimo di iterazioni consentito (`kmax` $= 30$), come indicato dal valore 3 del *flag* `info`. Il valore finale indicato dalla procedura è il simbolo `Inf`, utilizzato da Scilab per indicare un numero reale maggiore di circa $2 \cdot 10^{308}$. Questo risultato è corretto: aiutandosi con il disegno che riporta il grafico delle funzioni $y = h(x)$ e $y = x$ si deduce che per qualsiasi $x_0 < 1$, la successione generata ha limite $+\infty$.

Aiutandosi con il disegno che riporta il grafico delle funzioni $y = h(x)$ e $y = x$ si deduce anche che: per $-1 < x_0 < 1$ la successione generata converge ad $\alpha_0 = 0$ e per $x_0 > 1$ la successione generata ha limite $+\infty$. Dunque *esistono due soli valori* di x_0 a partire dai quali la successione generata converge a $\alpha_1 = 1$: $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$.