Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 16 gennaio 2013

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Calcolare: $\mathrm{rd}(\frac{7}{6})$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per calcolare A^{-1}. Infine, calcolare il numero di condizionamento di A in norma *uno*.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi $p(x) \in P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(0) + p(1) = 2 \quad , \quad \frac{dp}{dx}(0) = 0$$

Soluzione

Problema 1

Poiché

$$2^0 < x \leqslant 2^1$$

l'esponente di x in base due è 1, e per la frazione si ha:

$$g = \frac{7}{12} = 0.100101\ldots$$

Ne segue che $x \notin F(2,4)$.

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,4)$ ad esso adiacenti:

$$2^1 \cdot 0.1001 < x < 2^1 \cdot 0.1010$$

Poiché x risulta più vicino al primo dei due (il punto medio tra i due è $2^1 \cdot 0.10011 > x$), si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^1 \cdot 0.1001 = \frac{9}{8}$.

Problema 2

Si constata immediatamente che i primi due minori principali di testa di A hanno determinante non zero, dunque `EG` è definita in A che quindi ammette *una sola* fattorizzazione LR. Applicando, ad esempio, la procedura `EG`, si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice D risulta invertibile, dunque anche A lo è, e: $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Inoltre:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine, essendo: $\|A\|_1 = 2$ e $\|A^{-1}\|_1 = 2$ si ha: $c_1(A) = 2$.

Problema 3

Si cercano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $p(x) = a_0 + a_1 x$ si abbia:

$$p(0) + p(1) = 2\,a_0 + a_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{dp}{dx}(0) = a_1 = 0$$

Le due condizioni determinano univocamente il valore dei coefficienti: $a_0 = 1, a_1 = 0$. Dunque, l'*unico* elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che verifica le condizioni è: $p(x) = 1$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 5 febbraio 2013

Problema 1

Per approssimare i valori della funzione:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

si utilizza la funzione:

$$\phi(\xi) = \mathtt{SEN}(\xi) \oslash \mathtt{COS}(\xi)$$

Determinare la funzione di stabilità che esprime l'errore algoritmico relativo ϵ_a commesso nell'approssimazione, supponendo che:

$$\mathtt{SEN}(\xi) = \operatorname{rd}(\operatorname{sen} \xi) \quad \text{e} \quad \mathtt{COS}(\xi) = \operatorname{rd}(\cos \xi)$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per decidere se A sia definita positiva.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati:

$$(-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per le ipotesi, per ogni numero di macchina ξ esistono numeri reali ϵ_1 e ϵ_2 tali che:

$$\mathtt{SEN}(\xi) = (1+\epsilon_1)\,\mathrm{sen}\,\xi \quad , \quad \mathtt{COS}(\xi) = (1+\epsilon_2)\cos\xi$$

Per la definizione di $\oslash$ esiste inoltre un numero reale ϵ_3 tale che:

$$\mathtt{SEN}(\xi) \oslash \mathtt{COS}(\xi) = \frac{\mathrm{sen}\,\xi}{\cos\xi}\,\frac{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}{1+\epsilon_2}$$

Allora si ha:

$$\epsilon_a = S(\xi;\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3) = \frac{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}{1+\epsilon_2} - 1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3}{1+\epsilon_2}$$

Problema 2

Si constata immediatamente che i primi tre minori principali di testa di A hanno determinante non zero, dunque `EG` è definita in A che perciò ammette *una sola* fattorizzazione LR. Applicando, ad esempio, la procedura `EG`, si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Essendo $d_{33} < 0$, la matrice A (simmetrica) risulta *non* definita positiva.

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. I coefficienti a_0, a_1 e a_2 si devono determinare in modo che la quantità:

$$F(a_0,a_1,a_2) = (p(-1)-1)^2 + (p(0)+1)^2 + (p(0)-0)^2 + (p(0)-1)^2 + (p(1)-1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(x)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 1$$

L'elemento richiesto (unico: il sistema da risolvere nel senso dei minimi quadrati ha colonne linearmente indipendenti) è quindi: $p(x) = x^2$.

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 28 febbraio 2013

Problema 1

Sia $M = F(2, 3)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che:

$$4 \otimes \xi = 1$$

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ x & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinare gli insiemi:

$$C = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tali che } A(x) \text{ è a predominanza diagonale forte per colonne} \}$$
$$R = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tali che } A(x) \text{ è a predominanza diagonale forte per righe} \}$$
$$T = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tali che la procedura } \texttt{EG} \text{ è definita in } A(x) \}$$

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = e^x - 2 + x^2$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $4 = 2^3 \cdot 0.100 \in M$ e $1 = 2^1 \cdot 0.100 \in M$. Per definizione, $4 \otimes \xi = \mathrm{rd}(4\xi)$. Posto $x = 4\xi$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad x \in (2^0 \cdot 0.1111; 2^1 \cdot 0.1001)$$

essendo $2^0 \cdot 0.1111$ il punto medio dell'intervallo di estremi $\pi(1)$, 1 e $2^1 \cdot 0.1001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 1, $\sigma(1)$. Ne segue:

$$\tfrac{1}{4}x \in (2^{-2} \cdot 0.1111; 2^{-1} \cdot 0.1001)$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli inclusi nell'intervallo appena determinato. L'*unico* elemento di M così individuato è: $\xi = 2^{-1} \cdot 0.100 = \frac{1}{4}$.

Problema 2

Per definizione, $A(x)$ è a predominanza diagonale forte *per colonne* se e solo se:

$$2 > 1 + |x| \quad , \quad |-2| > |-1| \quad , \quad 3 > 1$$

ovvero se e solo se $|x| < 1$. Dunque: $C = (-1, 1)$.

Analogamente, $A(x)$ è a predominanza diagonale forte *per righe* se e solo se:

$$2 > 1 \quad , \quad |-2| > 1 \quad , \quad 3 > |-1| + |x|$$

ovvero se e solo se $|x| < 2$. Dunque: $R = (-2, 2)$.

Infine, la procedura `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se i determinanti dei primi *due* minori principali di testa sono diversi da zero. In questo caso lo sono per ogni valore di x, dunque $T = \mathbb{R}$.

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = e^x + 2x$$

e

$$f''(x) = e^x + 2$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero (positiva), quindi f ha *al più due zeri.* Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad f(0) = -1$$

dunque: *f ha due zeri*: uno positivo ed uno negativo.

Un intervallo finito che contiene lo zero negativo α_1 si ottiene constatando che:

$$f(-2) = e^{-2} - 2 + 4 > 0 \quad \text{e} \quad f(-1) = e^{-1} - 2 + 1 < 0$$

perciò: $\alpha_1 \in [-2, -1]$. Analogamente, un intervallo finito che contiene lo zero positivo α_2 si ottiene constatando che:

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f(1) = e - 2 + 1 > 0$$

perciò: $\alpha_2 \in [0,1]$.

Per approssimare α_2 si constata che nell'intervallo $[0,1]$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 1$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due*.

Per approssimare α_1 si constata che nell'intervallo $[-2,-1]$ si ha $f''(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ (infatti, essendo $f''(x) > 0$, la funzione $f'(x)$ risulta crescente, e $f'(-1) = e^{-1} - 2 < 0$) dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -2$, e tale successione risulta *crescente* e di *ordine di convergenza due*.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 giugno 2013

Problema 1

Sia $f(x) = \log x$. Determinare la funzione di condizionamento $C(x;\epsilon)$ del calcolo di $f(x)$ e discutere il condizionamento del calcolo di $f(x)$ per $x = e$.

Problema 2

Determinare la forma di Newton del polinomio che interpola i dati

$$(-1,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,1)$$

Problema 3

Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = 4\,\log x - x$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Posto $\tilde{x} = (1+\epsilon)x$, per ogni $x \neq 1$ si ha:

$$C(x;\epsilon) = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{\log(1+\epsilon)}{\log x}$$

Per $x = e$ si ha $\log x = 1$ e quindi:

$$C(e;\epsilon) = \log(1+\epsilon)$$

Per ϵ piccolo si ha $\log(1+\epsilon) \approx \epsilon$ quindi il calcolo di $f(x)$ per $x = e$ è *ben condizionato.*

Problema 2

Scelta la base di Newton $1, x+1, (x+1)x$, i coefficienti del polinomio interpolante $p(x)$ si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$p(x) = x + 1 - \frac{(x+1)x}{2}$$

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = \frac{4}{x} - 1$$

e

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2}$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero (negativa), quindi f ha *al più due zeri.* Inoltre:

$$f(1) = -1 < 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad f(e) = 4 - e > 0$$

dunque: *f ha due zeri.*

Un intervallo finito che contiene il primo zero α_1 è: $[1, e]$. Un intervallo finito che contiene il secondo zero α_2 si ottiene constatando che $f(10) < 0$, perciò: $\alpha_2 \in [e, 10]$.

Si constata che nell'intervallo $[1, e]$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$, dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_1 a partire da $x_0 = 1$, e tale successione risulta *crescente* e di *ordine di convergenza due.*

Invece, nell'intervallo $[e, 10]$ la derivata prima di f si annulla (per $x = 4$). Ma si constata che $f(4) > 0$, quindi $\alpha_2 \in (4, 10]$ e su tale intervallo si ha $f''(x) < 0$ e $f'(x) > 0$ dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 10$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due.*

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 8 luglio 2013

Problema 1

Sia $x = \frac{3}{17}$. Determinare esponente e frazione di x in base due e poi l'arrotondato di x in $M = F(2,2)$.

Problema 2

Applicare la procedura `EGPP` alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ed utilizzare la fattorizzazione ottenuta per calcolare $\det A$ e poi per risolvere il sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati

$$(-1,1) \quad , \quad (0,0) \quad , \quad (1,0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Poiché

$$2^{-3} < x \leqslant 2^{-2}$$

l'esponente di x in base due è -2, e per la frazione si ha:

$$g = \tfrac{12}{17}$$

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,2)$ ad esso adiacenti. Poiché $g = 0.1011\ldots$, questi sono:

$$2^{-2} \cdot 0.10 < x < 2^{-2} \cdot 0.11$$

Poiché x risulta più vicino al secondo dei due (il punto medio tra i due è $2^{-2} \cdot 0.101 < x$), si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-2} \cdot 0.11 = \frac{3}{16}$.

Problema 2

Si ha:

$$\mathtt{EGPP}(A) = (P_{34}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix})$$

Poi, posto $c = \mathtt{SA}(S, P_{34}^{\mathsf{T}} b)$, e $x = \mathtt{SI}(D, c)$ si ottiene:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(x) = a_0 + a_1 x$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità:

$$F(a_0, a_1) = (p(-1) - 1)^2 + (p(0))^2 + (p(1))^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(x)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{3} \quad , \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 luglio 2013

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare il più piccolo $\xi \in M$ tale che $\xi \ominus 2 > 1$.

Problema 2

Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = -e^x$.

(a) Determinare il numero dei punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti determinati, decidere se il metodo iterativo definito dalla funzione h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare un punto iniziale che garantisca la convergenza della successione.

Problema 3

Determinare l'elemento dello spazio $\langle 1, 2^x \rangle$ che meglio approssima i dati

$$(0,2) \quad , \quad (1,-3) \quad , \quad (2,1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, $\xi \ominus 2 = \mathrm{rd}(\xi - 2)$. Posto $x = \xi - 2$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 1 \quad \text{se e solo se} \quad x > 2^1 \cdot 0.10001$$

essendo $2^1 \cdot 0.10001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 1, $\sigma(1)$. Inoltre:

$$x > 2^1 \cdot 0.10001 \Leftrightarrow \xi > 2^1 \cdot 0.10001 + 2 = 2^2 \cdot 0.110001$$

Il numero di macchina cercato è dunque:

$$\xi = 2^2 \cdot 0.1101$$

Problema 2

I punti uniti di h sono tutti e soli gli x tali che:

$$x = h(x) = -e^x$$

Posto $F(x) = x + e^x$ (i punti uniti di h coincidono con gli zeri di F), poichè $F'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione h ha al piú un punto unito. Essendo inoltre $F(0) > 0$ e $F(-1) < 0$ si deduce che *h ha un solo punto unito* contenuto nell'intervallo $[-1, 0]$.

Poichè $h'(x) = -e^x$, l'intervallo scelto non verifica le prime due ipotesi del Teorema di convergenza locale. Da un grafico di $h'(x)$ si deduce però che esiste certamente un intervallo che soddisfa tali ipotesi. Si verifica che l'intervallo $[-1, -\frac{1}{2}]$ va bene. Infine, essendo $F(-\frac{3}{4}) < 0$, si deduce che *un punto iniziale che garantisce la convergenza della successione generata dal metodo è $x_0 = -\frac{1}{2}$.*

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $f(x) = a_0 + a_1 2^x$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (f(0) - 2)^2 + (f(1) + 3)^2 + (f(2) - 1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $f(x)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0$$

L'elemento richiesto è quindi: $f(x) = 0$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 settembre 2013

Problema 1

Sia $x = \frac{1}{4}$. Determinare esponente e frazione di x in base tre e decidere se $x \in F(3, 3)$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Decidere se A sia a predominanza diagonale forte per righe o per colonne e poi determinare una fattorizzazione LR di A.

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Poiché

$$3^{-2} < x \leqslant 3^{-1}$$

l'esponente di x in base tre è -1, e per la frazione si ha: $g = \frac{3}{4}$.

Per decidere se $x \in F(3,3)$ si considera la scrittura di g in base tre. Poiché

$$g = 0.202020\ldots$$

si ha: $x \notin F(3,3)$.

Problema 2

Dalla definizione, si constata che A *è a predominanza diagonale forte sia per righe che per colonne*. Questo implica che la funzione `EG` è definita in A e quindi consente di calcolare una fattorizzazione LR (l'unica) della matrice.

Si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = -e^{-x} + 2x$$

e

$$f''(x) = e^{-x} + 2$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero (positiva), quindi f ha *al più due zeri*. Inoltre:

$$f(0) = -1 < 0 \quad , \quad f(\sqrt{2}) > 0 \quad \text{e} \quad f(-\sqrt{2}) > 0$$

dunque: *f ha due zeri* e un intervallo finito che contiene il primo zero α_1 è: $[-\sqrt{2}, 0]$, un intervallo finito che contiene il secondo zero α_2 è: $[0, \sqrt{2}]$.

Si constata che nell'intervallo $[-\sqrt{2}, 0]$ si ha $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$, dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -\sqrt{2}$, e tale successione risulta *crescente* e di *ordine di convergenza due.*

Invece, nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$ la derivata prima di f si annulla. Ma si constata che $f(\frac{1}{2}) < 0$, quindi $\alpha_2 \in [\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ e su tale intervallo si ha $f''(x) > 0$ e $f'(x) > 0$ dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_2 a partire da $x_0 = \sqrt{2}$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due.*

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 15 novembre 2013

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'insieme

$$\{\, \xi \in M \text{ tali che } \xi \oplus 4 > 2 \,\}$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarala per decidere se A è invertibile ed, eventualmente, per determinare A^{-1}.

Problema 3

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.