**Dipartimento di Matematica Applicata**
**« Ulisse Dini »**

# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 settembre 2013

### Problema 1

Sia $x = \frac{1}{4}$. Determinare esponente e frazione di $x$ in base tre e decidere se $x \in F(3,3)$.

### Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Decidere se $A$ sia a predominanza diagonale forte per righe o per colonne e poi determinare una fattorizzazione LR di $A$.

### Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$.

(a) Determinare il numero di zeri di $f$ e separarli.

(b) Per ciascun $\alpha$ zero di $f$, determinare $x_0$ tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da $x_0$, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad $\alpha$.

## Soluzione

### Problema 1

Poiché

$$3^{-2} < x \leqslant 3^{-1}$$

*l'esponente di $x$ in base tre è $-1$*, e per la frazione si ha: $g = \frac{3}{4}$.

Per decidere se $x \in F(3,3)$ si considera la scrittura di $g$ in base tre. Poiché

$$g = 0.202020\ldots$$

si ha: $x \notin F(3,3)$.

### Problema 2

Dalla definizione, si constata che $A$ *è a predominanza diagonale forte sia per righe che per colonne*. Questo implica che la funzione `EG` è definita in $A$ e quindi consente di calcolare una fattorizzazione LR (l'unica) della matrice.

Si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

### Problema 3

Per la funzione $f$ si ha:

$$f'(x) = -e^{-x} + 2x$$

e

$$f''(x) = e^{-x} + 2$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero (positiva), quindi $f$ ha *al più due zeri*. Inoltre:

$$f(0) = -1 < 0 \quad , \quad f(\sqrt{2}) > 0 \quad \text{e} \quad f(-\sqrt{2}) > 0$$

dunque: *$f$ ha due zeri* e un intervallo finito che contiene il primo zero $\alpha_1$ è: $[-\sqrt{2}, 0]$, un intervallo finito che contiene il secondo zero $\alpha_2$ è: $[0, \sqrt{2}]$.

Si constata che nell'intervallo $[-\sqrt{2}, 0]$ si ha $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$, dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad $\alpha_1$ a partire da $x_0 = -\sqrt{2}$, e tale successione risulta *crescente* e di *ordine di convergenza due.*

Invece, nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$ la derivata prima di $f$ si annulla. Ma si constata che $f(\frac{1}{2}) < 0$, quindi $\alpha_2 \in [\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ e su tale intervallo si ha $f''(x) > 0$ e $f'(x) > 0$ dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad $\alpha_2$ a partire da $x_0 = \sqrt{2}$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due.*