Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 29 luglio 2013

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare il più piccolo $\xi \in M$ tale che $\xi \ominus 2 > 1$.

Problema 2

Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = -e^x$.

(a) Determinare il numero dei punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti determinati, decidere se il metodo iterativo definito dalla funzione h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare un punto iniziale che garantisca la convergenza della successione.

Problema 3

Determinare l'elemento dello spazio $\langle 1, 2^x \rangle$ che meglio approssima i dati

$$(0,2) \quad , \quad (1,-3) \quad , \quad (2,1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, $\xi \ominus 2 = \mathrm{rd}(\xi - 2)$. Posto $x = \xi - 2$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 1 \quad \text{se e solo se} \quad x > 2^1 \cdot 0.10001$$

essendo $2^1 \cdot 0.10001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 1, $\sigma(1)$. Inoltre:

$$x > 2^1 \cdot 0.10001 \Leftrightarrow \xi > 2^1 \cdot 0.10001 + 2 = 2^2 \cdot 0.110001$$

Il numero di macchina cercato è dunque:

$$\xi = 2^2 \cdot 0.1101$$

Problema 2

I punti uniti di h sono tutti e soli gli x tali che:

$$x = h(x) = -e^x$$

Posto $F(x) = x + e^x$ (i punti uniti di h coincidono con gli zeri di F), poichè $F'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione h ha al piú un punto unito. Essendo inoltre $F(0) > 0$ e $F(-1) < 0$ si deduce che *h ha un solo punto unito* contenuto nell'intervallo $[-1, 0]$.

Poichè $h'(x) = -e^x$, l'intervallo scelto non verifica le prime due ipotesi del Teorema di convergenza locale. Da un grafico di $h'(x)$ si deduce però che esiste certamente un intervallo che soddisfa tali ipotesi. Si verifica che l'intervallo $[-1, -\frac{1}{2}]$ va bene. Infine, essendo $F(-\frac{3}{4}) < 0$, si deduce che *un punto iniziale che garantisce la convergenza della successione generata dal metodo è $x_0 = -\frac{1}{2}$.*

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $f(x) = a_0 + a_1 2^x$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (f(0) - 2)^2 + (f(1) + 3)^2 + (f(2) - 1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $f(x)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0$$

L'elemento richiesto è quindi: $f(x) = 0$.