Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 8 luglio 2013

Problema 1

Sia $x = \frac{3}{17}$. Determinare esponente e frazione di x in base due e poi l'arrotondato di x in $M = F(2,2)$.

Problema 2

Applicare la procedura `EGPP` alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ed utilizzare la fattorizzazione ottenuta per calcolare $\det A$ e poi per risolvere il sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati

$$(-1,1) \quad , \quad (0,0) \quad , \quad (1,0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Poiché

$$2^{-3} < x \leqslant 2^{-2}$$

l'esponente di x in base due è -2, e per la frazione si ha:

$$g = \frac{12}{17}$$

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,2)$ ad esso adiacenti. Poiché $g = 0.1011\ldots$, questi sono:

$$2^{-2} \cdot 0.10 < x < 2^{-2} \cdot 0.11$$

Poiché x risulta più vicino al secondo dei due (il punto medio tra i due è $2^{-2} \cdot 0.101 < x$), si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-2} \cdot 0.11 = \frac{3}{16}$.

Problema 2

Si ha:

$$\mathtt{EGPP}(A) = (P_{34}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix})$$

Poi, posto $c = \mathtt{SA}(S, P_{34}^{\mathsf{T}} b)$, e $x = \mathtt{SI}(D, c)$ si ottiene:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(x) = a_0 + a_1 x$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità:

$$F(a_0, a_1) = (p(-1) - 1)^2 + (p(0))^2 + (p(1))^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(x)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{3} \quad , \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x$.